**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA II**

# TESIS DOCTORAL

# Perturbaciones primordiales en Cosmología Cuántica de Lazos

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTORA

PRESENTADA POR

**Laura Castelló Gomar**

DIRECTOR

**Guillermo Antonio Mena Marugán**

**Madrid, 2017**

Departamento de Física Teórica II

Facultad de Ciencias Físicas

**Universidad Complutense de Madrid**

## Tesis Doctoral

---

# Perturbaciones primordiales en Cosmología Cuántica de Lazos

---

**Laura Castelló Gomar**

Instituto de Estructura de la Materia

**Consejo Superior de Investigaciones Científicas**

**Director de Tesis:**

**Guillermo A. Mena Marugán,** Instituto de Estructura de la Materia (CSIC)

Madrid, 2016

*A mis padres.*

# AGRADECIMIENTOS

Me gustaría utilizar estas primeras líneas para expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que de una forma u otra han contribuido en esta tesis. En especial, quiero dar las gracias a Guillermo por embarcarme en este viaje. Es difícil reflejar en palabras la gratitud que siento por la confianza y el apoyo inestimable que me has mostrado siempre. Sobre todo, gracias por tu amistad y por todo lo que he aprendido junto a ti.

A Javi, Dani y Mikel por vuestro recibimiento, porque, desde el minuto uno, me considerasteis como una más del grupo. A Ana y Bea, que aparecisteis por aquí más tarde, pero que todos juntos hemos vivido grandes momentos inolvidables, tanto dentro como fuera del Instituto.

Quiero mencionar a Zé y a Teresa por esas largas noches que hemos disfrutado juntos. Y a Jerónimo, gracias.

Muchas gracias a Luis por ser la persona que, en realidad, me llevó hasta todos ellos y por toda la ayuda que he recibido (hasta en el último preciso momento).

Tengo que agradecer también al Instituto de Estructura de la Materia del CSIC su acogida para la realización de esta tesis, y por ofrecerme un espacio en él.

*Laura Castelló Gomar*

# SUMMARY

The fact that our Universe seems approximately homogeneous and isotropic leads us to expect that its inhomogeneities can indeed be treated as perturbations around a Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) background. Actually, the theory of cosmological perturbations, combined with inflation, has proven to give us a good approximation to the anisotropies of the Cosmic Microwave Background, and is able to explain quite satisfactorily the formation of structures at large scales. The principal aim of this thesis is to provide a consistent framework for the quantum description of the evolution of cosmological scalar perturbations (and, by extension, also of tensor perturbations) in the Early Universe. Additionally, this framework is to be designed as to allow us to extract predictions, in the hope that theoretical quantum cosmology models can be eventually falsified with observations, in the current era of "precision cosmology"when this Physics discipline is experiencing a golden age thanks to the recent technical developments that are supplying us with increasingly accurate data.

In order to investigate whether it is possible to find information about the genuine quantum nature of the geometry of the spacetime encoded in the imprints left by the quantum fluctuations that occurred in the Early Universe, our quantum description must include, simultaneously, both the background geometry and the cosmological perturbations, with interplay between them. In this thesis, we elaborate a quantization program based on a hybrid approach, which was originally developed for the quantization of inhomogeneous gravitational models in Loop Quantum Cosmology. The strategy consists in splitting the phase space of the considered cosmological system in two: a homogeneous and an inhomogeneous sector. This splitting is attained starting with an expansion in modes of the metric variables and matter fields, using the spatial symmetries. The homogeneous sector incorporates the zero-modes, while the inhomogeneous one includes all the rest of degrees of freedom, present in the perturbations. Then, we proceed to combine different types of quantum representations for each of these parts. More specifically, we use a loop quantization for the homogeneous sector in most of the discussion of this thesis, while a standard Fock representation is applied to the perturbations. Nonetheless, we also analyze the generalization of this hybrid approach, when the FLRW geometry is treated with a more general quantization proposal than just the one arising from Loop Quantum Gravity.

Generically, when one is dealing with quantum fields in curved spacetimes, one encounters an intrinsic quantization ambiguity at least in two important steps. First, in the way in which one parameterizes the field, since one can introduce linear transformations that scale this field, multiplying it with time dependent functions of the background. In fact, some of these scaling transformations may lead to a simpler and better behaved formulation of the dynamics. And second, there exists an infinite ambiguity in the choice of a Fock representation for the associated canonical commutation relations. The freedom in this choice can be understood as the freedom in the selection of a vacuum among all the inequivalent possibilities at hand. Obviously, the existence of these ambiguities is a crucial issue, which is especially relevant in the case of cosmology, since they may undermine the robustness of the predictions of the theory, facing the risk that those predictions become devoid of physical significance. Part of this thesis is devoted to the proof that, indeed, such ambiguities can be removed with certain criteria, namely, with the requirements of vacuum invariance under the spatial isometries and of unitary field dynamics.

On other hand, it is well known that, in order to capture the genuine degrees of freedom of the cosmological perturbations, one has to introduce gauge invariants, that is, variables which are independent of gauge transformations of the background. Quantum mechanically, the predictions must be robust under fluctuations of the non-physical gauge part of the perturbations. To reach this goal, the formulation must be covariant up to the level of truncation in the perturbative approximation. In this thesis, we explain how to construct such formalism. For flat topology, then, the perturbations can be expressed in terms of Mukhanov-Sasaki gauge invariants, Abelianized linear perturbative constraints, and variables canonically conjugate to them. This set can be completed into a canonical one for the entire cosmological system, including variables for the zero-modes that describe the homogenous sector of degrees of freedom and which absorb a homogeneous quadratic contribution of the perturbations. Under quantization, physical states are shown to depend only on these zero-modes and on gauge invariants, solving in this way the problem of the possible quantum influence of the gauge freedom.

Within this formalism, we discuss how to extract the quantum field equations that dictate the propagation of the perturbations. In doing this, we analyze their range of validity in the quantum theory. The derivation of these equations is carried out without appealing to any sort of semiclassical approximation for the homogeneous geometry. Instead, we employ a kind of Born-Oppenheimer ansatz. Finally, from this discussion, we deduce an effective equation governing the dynamics of the Mukhanov-Sasaki gauge invariants, which includes quantum modifications, but displays the same ultraviolet behavior that appears in the classical theory. This provides the master equation to extract predictions about the power spectrum of the primordial scalar perturbations. The specific form of these corrections depends on a series of details about the quantization approach and about the particular prescription followed to implement it. To complete our investigations, in this thesis we also develop theoretical tools and design a procedure to deal with the computation of these quantum corrections. The ultimate aim of this work is to increase our ability to discriminate between the predictions of diverse quantization proposals for cosmological perturbations, facilitating the identification of physical differences among those proposals and between them and the classical results.

# RESUMEN


Las propiedades de homogeneidad e isotropía observadas en nuestro Universo sugieren que sus inhomogeneidades pueden ser tratadas como perturbaciones en torno a un espacio-tiempo de fondo de tipo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). A decir verdad, la teoría de perturbaciones cosmológicas, combinada con el paradigma inflacionario, ofrece una buena aproximación a las anisotropías del fondo cósmico de microondas, y es capaz de explicar de manera bastante satisfactoria la formación de estructuras a escalas cosmológicas. El objetivo principal de esta tesis es proporcionar un marco sólido para la descripción cuántica de la evolución de las perturbaciones cosmológicas escalares (y, por extensión, también de las perturbaciones tensoriales) en el Universo Primitivo. Este marco, además, permite extraer predicciones, en la esperanza de poder contrastar los modelos teóricos con las observaciones, gracias a los recientes desarrollos técnicos que nos proporcionan datos cada vez con mayor precisión.

Con el fin de investigar la posibilidad de encontrar información acerca de la verdadera naturaleza cuántica de la geometría del espacio-tiempo codificada en las huellas dejadas por las fluctuaciones cuánticas del Universo Primitivo, nuestro modelo debe involucrar, al mismo tiempo, tanto la geometría de fondo como las perturbaciones cosmológicas, interactuando entre sí. En esta tesis, elaboramos un programa de cuantización basado en un formalismo híbrido, que fue propuesto originalmente para la cuantización de los primeros modelos gravitacionales inhomogéneos que se estudiaron en Cosmología Cuántica de Lazos. La estrategia consiste en dividir el espacio de fases del sistema cosmológico considerado en dos: un sector homogéneo y otro inhomogéneo. Para ello, se realiza una expansión en modos de la métrica y el campo material, utilizando las simetrías espaciales. El sector homogéneo incorpora los modos cero, mientras que el inhomogéneo incluye el resto de grados de libertad presentes en las perturbaciones. A continuación, se combinan diferentes tipos de representaciones cuánticas para cada una de esas partes. En el grueso de nuestra discusión, utilizamos una cuantización de lazos para el sector homogéneo, mientras que para las perturbaciones empleamos una representación más estándar, de tipo Fock. No obstante, analizamos también la generalización de este formalismo híbrido para casos es los que la geometría de FLRW se trata con una propuesta de cuantización más general que la correspondiente a la Gravedad Cuántica de Lazos.

De forma genérica, cuando se trabaja con campos en espacio-tiempos curvos, aparecen durante el procedimiento de cuantización ciertas ambigüedades ligadas al número infinito de grados de libertad del sistema, que afectan a las predicciones físicas de la teoría. Una de ellas tiene que ver con la elección de las variables que se emplean para describir los grados de libertad del sistema. Incluso respetando la linealidad, un reescalado del campo dependiente del tiempo afecta a la dinámica, y por tanto influye en la viabilidad de su cuantización. Otro tipo de ambigüedad concierne a la selección de la representación de Fock para las relaciones de conmutación canónicas. Esta ambigüedad en dicha elección puede ser entendida como la libertad que tenemos a la hora de seleccionar el estado de vacío entre las infinitas posibilidades no-equivalentes. Obviamente, esta discusión es crucial, y especialmente relevante en el caso de la cosmología, dado que resta solidez a las predicciones de la teoría, llegando a la posibilidad de que se vuelvan carentes de significado físico. Parte de esta tesis está dedicada a la demostración de que, en realidad, este tipo de ambigüedades se pueden eliminar con ciertos criterios, a saber, con los requerimiento de invariancia del estado de vacío bajo las isometrías espaciales y de la implementación unitaria de la dinámica del campo.

Por otra parte, como es sabido, a la hora de extraer los grados de la libertad físicos reales de las perturbaciones cosmológicas, deben introducirse invariantes de gauge, es decir, variables que son independientes de posibles transformaciones de gauge del fondo. Para alcanzar este objetivo, la descripción del sistema debe ser covariante hasta el orden de truncamiento de nuestra aproximación perturbativa. En esta tesis, también explicamos cómo construir dicho formalismo. En concreto mostramos que, para el caso de una topología espacial plana, las perturbaciones se pueden expresar en términos de los invariantes de Mukhanov-Sasaki, una abelianización de las ligaduras lineales perturbativas y variables canónicamente conjugadas a éstas. La transformación puede extenderse al sistema cosmológico completo respetando la estructura simpléctica canónica, de manera que incluya las variables de modo cero que describen el sector homogéneo con correcciones cuadráticas en las perturbaciones. Tras la cuantización, mostramos que los estados físicos únicamente dependen de estos modos cero y de las variables invariantes de gauge de Mukhanov-Sasaki, resolviendo así el problema de posibles influencias cuánticas de dicha libertad de gauge.

Dentro de nuestro esquema, también discutimos cómo obtener las ecuaciones cuánticas de campo que dictan la propagación de las perturbaciones, analizando su validez en la teoría cuántica. Durante el proceso, no recurrimos a ningún tipo de aproximación semiclásica para la geometría homogénea. En su lugar, empleamos un ansatz de tipo Born-Oppenheimer. Finalmente, deducimos una ecuación efectiva para la dinámica de los invariantes de Mukhanov-Sasaki, que incluye correcciones cuánticas, pero que conserva el mismo régimen ultravioleta que aparece en la teoría clásica. Esta ecuación constituye la ecuación maestra para el cálculo del espectro de potencias de las perturbaciones escalares primordiales. La forma específica de las correcciones que surgen depende de una serie de detalles de la propuesta particular de cuantización y de las prescripciones que se siguen en su implementación. Para concluir nuestra investigación, además, desarrollamos las herramientas teóricas necesarias y diseñamos un procedimiento para calcular dichas correcciones cuánticas. En definitiva, el objetivo último de esta tesis es mejorar nuestra capacidad para discriminar entre las predicciones de diversas propuestas de cuantización de perturbaciones cosmológicas, poniendo al alcance la identificación de las diferencias físicas entre dichas propuestas y entre éstas y los resultados clásicos ya conocidos.

# ÍNDICE GENERAL

# 1

# INTRODUCCIÓN

## 1.1. Motivación

Desde los trabajos pioneros de Lifshitz [1, 2], a mediados del siglo XX, el estudio de perturbaciones ha desempeñado un papel fundamental en la búsqueda de un modelo sencillo y realista del Universo en cosmología. Existen evidencias observacionales importantes de que el Universo era homogéneo e isótropo a todas las escalas en sus etapas primitivas, y, actualmente, parece serlo a escalas suficientemente grandes (superiores al centenar de megaparsecs). De modo que, en primera aproximación, puede ser descrito mediante un espaciotiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) dentro del marco de Relatividad General. Esta aproximación está respaldada no sólo por la combinación de diversas observaciones y ciertas hipótesis de partida, como el principio cosmológico, sino también a través de algunos resultados teóricos [3–5] (al menos para cierto tipo de contenido material). Sin embargo, estas propiedades abren un interrogante sobre el origen de las estructuras materiales que observamos en la actualidad, y su evolución. Ante el casi total desconocimiento del Universo primordial, parece natural asumir la existencia de perturbaciones débiles que podían crecer gradualmente en un universo en expansión como consecuencia de inestabilidades gravitaciones, y que, por tanto, constituirían las semillas para la formación de grandes estructuras. Siguiendo estas ideas, la teoría de perturbaciones cosmológicas [6, 7] junto con el paradigma de inflación [8, 9] proporcionan, hoy en día, una destacable descripción, capaz de explicar en detalle la formación de estructuras a gran escala y el fondo cósmico de microondas (CMB, acrónimo inglés de *Cosmic Microwave Background*).

Una parte importante de los resultados observacionales más relevantes en cosmología en los últimos años proviene de las medidas del CMB y, en particular, de sus anisotropías [10]. Este campo de radiación codifica información sobre el espectro de las perturbaciones primordiales y las condiciones del plasma de fotones y bariones que existía en las etapas más tempranas de la historia del Universo, previas al llamado desacoplamiento de la radiación y la materia. El CMB aparece como un fondo de radiación altamente uniforme con un espectro que se ajusta con mucha precisión al de un cuerpo negro con una temperatura característica de 2,7K. La medida de las fluctuaciones de temperatura de esta radiación primordial, originadas a partir de pequeñas fluctuaciones cuánticas presentes en el Universo primitivo, es muy importante en la actualidad dentro del campo que se conoce como *cosmología de precisión*, en una era en la que la tecnología nos está permitiendo tomar datos sobre un amplio abanico de fenómenos astronómicos y astrofísicos, haciendo posible por primera vez en la historia la determinación de un número considerable de parámetros cosmológicos con varios dígitos de precisión [11–13].

El último análisis de la misión Planck sobre el espectro de potencias del CMB [14, 15] se ajusta de manera extraordinaria a las predicciones teóricas de la Cosmología Estándar [16, 17] dentro de un amplio rango de escalas. En un análisis estándar de las fluctuaciones primordiales, uno estudia las perturbaciones dentro del esquema de Teoría Cuántica de Campos en un espacio-tiempo curvo clásico y fijo. Desde este punto de vista, uno representa las perturbaciones mediante campos cuánticos que se propagan sobre una geometría dada, concretamente, sobre un espacio-tiempo de De Sitter, el cual describe bastante bien la época inflacionaria del Universo. Y lo cierto es que, a partir de los datos actuales, sabemos que considerando fluctuaciones con amplitudes del orden de $10^{-5}$ se consigue reproducir las estructuras galácticas que observamos hoy. No obstante, los datos empiezan a indicar ciertas tensiones entre estas predicciones y las observaciones [14, 18], especialmente a grandes escalas angulares. Por ejemplo, parece observarse un déficit de energía para multipolos bajos (esto es, con un número pequeño de $l$), correspondientes a dichas escalas. Asimismo, también parece que surgen desviaciones inesperadas entorno a $l = 30$ [18]. Estas anomalías en el espectro de las anisotropías del campo de temperatura han despertado un especial interés entre la comunidad de cosmólogos, puesto que podrían tener su origen en procesos físicos fundamentales que ocurrieron en las primeras épocas del Universo. Sin embargo, resulta muy complicado encontrar ahora una explicación concluyente, debido a la incertidumbre de las medidas como consecuencia, entre otras cosas, del problema de la varianza cósmica. Aun así, una posibilidad prometedora para la comunidad de físicos que trabajan en la cuantización de la gravedad es que dichas anomalías y desviaciones pudieran ser las huellas de efectos genuinamente cuánticos de la geometría del espacio-tiempo, que hubieran afectado a las perturbaciones cosmológicas primordiales, y que hubieran dejado su impronta en las anisotropías primarias del CMB.

Estas ideas están transformando el campo de la cosmología cuántica actual, impulsando la extracción de predicciones de modelos cuánticos del Universo con la esperanza de poder confrontarlas con las observaciones de las que se dispone en el presente o con las que se espera contar en un futuro próximo. De esta forma, en lugar de restringirse a considerar la Teoría Cuántica de Campos en un fondo fijo como el último paso en el progreso hacia el entendimiento de las fluctuaciones cuánticas en el Universo primitivo, y ver los campos cuánticos de las perturbaciones simplemente como campos de prueba que se propagan en una geometría dada (que podría ser puramente clásica, pero también podría incluir correcciones propias de su cuantización), uno alberga la confianza de encontrar una teoría cuántica que incorpore ambas, la geometría y las perturbaciones, interactuando entre ellas, y de que ésta sea potencialmente predictiva. El objetivo último sería identificar esas ventanas hacia la observación de los rastros dejados por los fenómenos que ocurrieron en etapas muy tempranas del Universo, y así detectar predicciones que permitieran, además, falsear el modelo, o incluso la teoría cuántica de la gravedad de la cual éste se deriva (superando la salvedad de que la deducción no esté basada en ninguna hipótesis extra y que por lo tanto sea esencialmente única). A fin de cuentas, sólo cuando el fondo homogéneo y las perturbaciones inhomogéneas son tratadas cuánticamente a un nivel equivalente es posible hablar de una estructura cuántica para la geometría que incluye ambos, el fondo y las perturbaciones.

En este contexto, se le ha prestado mucha atención en los últimos años al desarrollo de un formalismo para perturbaciones cosmológicas en el marco de la denominada Cosmología Cuántica de Lazos (LQC, acrónimo inglés de *Loop Quantum Cosmology*). El programa de LQC [19–23] aborda la cuantización de sistemas cosmológicos siguiendo los métodos de Gravedad Cuántica de Lazos (LQG) [24, 25], una propuesta no perturbativa e independiente del fondo para la cuantización de la Relatividad General que constituye, hoy en día, uno de los candidatos más prometedores para alcanzar una teoría cuántica de la interacción gravitatoria. Este formalismo ha sido aplicado con éxito en escenarios homogéneos, no sólo para sistemas de espacio-tiempos de FLRW con varios tipos de contenido material [26–35], sino también para diferentes modelos anisótropos de tipo Bianchi [36–42]. Una de las predicciones más destacables es la resolución de la singularidad de la Gran Explosión (o Big Bang), que es inevitable en la teoría clásica de Einstein (ver, por ejemplo, [43, 44]), y que se ve reemplazada por un rebote cuántico conocido como el Big Bounce, al menos para algunas familias de estados concretos con un marcado comportamiento clásico [26, 27, 45]. La limitación de la homogeneidad es una clara restricción en este tratamiento cuántico de la geometría y de la estructura del espacio-tiempo en cosmología; por ello, resulta natural intentar dar un paso más en el análisis de sistemas cosmológicos. Precisamente, las perturbaciones cosmológicas son un marco óptimo para ello, por dos motivos: por el alto nivel de conocimiento que tenemos respecto a su tratamiento clásico y por su relevancia física actual, tal y como ya hemos apuntado.

El problema se ha abordado desde dos perspectivas distintas dentro de LQC. Uno de los formalismos empleados proporciona un esquema para derivar las ecuaciones efectivas para las perturbaciones que captura los efectos de la naturaleza cuántica de la geometría del espacio-tiempo [46–57]. Está basado en el cierre del álgebra de ligaduras en la teoría cuántica. Esta condición restringe las correcciones cuánticas posibles para las ligaduras de Relatividad General. Junto con las suposiciones sobre las correcciones que se esperan de la propia LQG (consecuencia del uso de holonomías y la regularización de la inversa del operador volumen), una serie de hipótesis técnicas (y no tan obvias, sobre la validez de las expansiones, la elección de las variables canónicas, localidad, etc.), y la introducción de una estructura de tipo corchetes de Poisson para los valores esperados y los momentos conjugados de las variables fundamentales, este esquema permite estudiar las ecuaciones de campo modificadas para las perturbaciones. Por su parte, la otra línea de ataque trata la cuantización directa del sistema, incluyendo la geometría FLRW y las perturbaciones [58–63]. En principio, los dos tratamientos deberían de ser complementarios, puesto que las hipótesis que se utilizan para la derivación de las ecuaciones efectivas a partir del cierre del álgebra únicamente se podrían comprobar cuando uno tuviera a su disposición un formalismo genuinamente cuántico. Por otro lado, para extraer la física de esta descripción cuántica verdadera, es necesario entender el régimen efectivo que es consistente con las simetrías y las propiedades fundamentales del sistema.

Los trabajos que afrontan directamente la descripción cuántica de un universo de FLRW con perturbaciones tratan de combinar una cuantización genuina de lazos de la geometría con un contenido material homogéneo junto con una cuantización de Fock estándar para las perturbaciones de la geometría y el campo material [58, 59, 62–64]. La idea se inspira en el formalismo híbrido en LQC que fue propuesto originalmente por L.J. Garay, M. Martín-Benito y G.A. Mena Marugán para los primeros modelos cosmológicos inhomogéneos que fueron cuantizados en el marco de la formulación de lazos, es decir, los modelos de Gowdy con ondas gravitaciones con polarización lineal [65–69]. Estos modelos representan espacio-tiempos con dos vectores de Killing espaciales y con secciones espaciales compactas, que pueden ser homeomorfas únicamente al tres-toro, a la tres-esfera, o a la tres-asa [70, 71]. Para el caso con la topología del tres-toro y en que los grados de libertad inhomogéneos de la métrica describen sólo una de las dos posibles polarizaciones de las ondas gravitacionales (concretamente, ondas con polarización lineal), estos modelos han sido cuantizados siguiendo un tratamiento exacto de la geometría sin necesidad de introducir un truncamiento perturbativo, incluso en presencia de campos materiales escalares [72, 73]. La cuantización de Fock de los modos inhomogéneos de la métrica y de los campos materiales se puede encontrar muy bien detallada en las referencias [74–77], imponiendo los criterios de invariancia bajo las isometrías espaciales del modelo y la implementación unitaria de la dinámica. En realidad, estos criterios han demostrado su validez para seleccionar un único par canónico a la hora de describir los campos inhomogéneos entre todos aquéllos que pueden estar relacionados mediante reescalados de la variable de configuración a través de una función de la geometría homogénea (del fondo) [74]. Además, el mismo criterio permite seleccionar una única clase de representaciones de Fock unitariamente equivalentes para las relaciones de conmutación canónicas correspondientes [75–77].

De manera similar, estos criterios se pueden aplicar también para escoger una única cuantización de Fock para las inhomogeneidades en escenarios más generales [78–82]. Por ejemplo, siguiendo el formalismo híbrido, los criterios de unicidad se han empleado para la cuantización de perturbaciones entorno a un espacio-tiempo de FLRW [58, 59] (específicamente, para el caso de una topología espacial compacta esférica o plana). Dicha cuantización se basa, esencialmente, en dos hipótesis. La primera, como ya hemos mencionado, que los efectos más relevantes de la geometría cuántica de lazos son aquéllos que afectan a los modos cero de la geometría FLRW, de forma que se podría adoptar una jerarquía en la cuantización donde el resto de grados de libertad de la geometría admiten una descripción cuántica más convencional, por ejemplo de tipo Fock. En segundo lugar, se introduce un truncamiento del sistema a segundo orden perturbativo en la acción, considerando que las inhomogeneidades tanto del campo material como de la métrica son perturbaciones de orden lineal o superior, y separándolas de los modos cero homogéneos del sistema. Una discusión reciente sobre cómo este proceso de truncamiento permite una descripción simpléctica del sistema consistente se encuentra en la referencia [57]. No obstante, es bastante evidente si uno empieza con la acción gravitacional y las variables de materia en términos de los modos cero y las perturbaciones inhomogéneas, y trunca el resultado a orden cuadrático. Por construcción, se obtiene una estructura simpléctica para el sistema que contiene perturbaciones, así como las ligaduras a las cuales el sistema está sujeto, que emergen de las propias de la teoría gravitacional al orden de truncamiento adoptado en la acción.

En los análisis previos de perturbaciones cosmológicas que utilizaban el formalismo híbrido para LQC se hacía uso de variables adaptadas a las reducciones del sistema mediante fijaciones de gauge [58, 59]. Esto presenta varios inconvenientes. Primero, refuerza la falsa impresión de que los resultados son intrínsecamente dependientes del gauge. Aunque ya fue probado en las referencias [58, 59, 80] que, en el régimen en el que las inhomogeneidades admiten una descripción a partir de una Teoría Cuántica de Campos en un fondo curvo (que incluya las modificaciones propias de LQC con respecto a Relatividad General), esta teoría es unitariamente equivalente a aquélla basada en las variables de creación y aniquilación construida a partir de los invariantes de gauge, la discusión sobre este tratamiento todavía resulta confusa por el uso de variables que no son realmente invariantes de gauge. La introducción de los invariantes nos ayudaría a evaluar la medida en la que nuestro formalismo restringe la libertad, tanto clásica como cuántica, en las transformaciones de gauge del sistema perturbado. En particular, para el caso plano, uno desearía describir las perturbaciones en términos de la variable de Mukhanov-Sasaki [83, 84]. Por un lado, estas variables perturbativas son invariantes de gauge y permiten un análisis directo sobre el espectro de potencias primordial, porque están relacionadas de una forma muy sencilla con las perturbaciones de curvatura comóviles. Además, estas variables satisfacen una ecuación de Klein-Gordon en un espacio-tiempo estático auxiliar con un potencial cuadrático que depende del tiempo, lo cual nos da cierta ventaja puesto que es precisamente para este tipo de ecuación para la que nuestros criterios de unicidad son válidos a la hora de seleccionar una única cuantización de Fock. Por otro lado, el uso de las variables de Mukhanov-Sasaki facilita la comparación con el esquema de cuantización que emplean otros tratamientos de las perturbaciones en LQC, en los cuales ya se utilizan, y específicamente con la propuesta denominada de *métrica vestida* [62, 63]. Por último, la formulación en términos de las variables de Mukhanov-Sasaki resulta todavía más conveniente si se considera como un paso previo a la introducción de una trasformación canónica más general que nos permita desarrollar una descripción covariante que resuelva por completo las dificultades relativas a la libertad gauge. Además, al completar esta reformulación con una transformación canónica del sistema completo, incluyendo los modos homogéneos, uno obtendría una teoría cuántica que preserva la estructura simpléctica del modelo y donde la dependencia de gauge quedaría totalmente explicada, de modo que la identificación de los grados de libertad físicos sería inmediata. De esta forma, la formulación en términos de las variables de Mukhanov-Sasaki también clarifica algunas discusiones recientes sobre el papel de la fijación de gauge en la separación de los modos cero de las perturbaciones inhomogéneas dentro del esquema híbrido.

## 1.2. Cosmología Cuántica de Lazos: modelo de FLRW plano

En esta sección presentaremos las técnicas empleadas en Cosmología Cuántica de Lazos centrándonos, principalmente, en el modelo que empleamos en esta tesis: un espacio-tiempo homogéneo e isótropo en expansión con topología espacial plana, y con un campo escalar homogéneo. El espacio de fases clásico del modelo se construye usando la formulación propia de Gravedad Cuántica de Lazos, es decir, a partir de las variables de Ashtekar-Barbero. Por ello, y tras presentar una breve discusión para motivar la necesidad de una teoría cuántica de la interacción gravitatoria, empezaremos haciendo un repaso de este formalismo.

### 1.2.1. ¿Por qué cuantizar la gravedad?

Uno de los retos de la Física Moderna es reconciliar la Teoría Cuántica, que explica los procesos fundamentales del mundo microscópico, con la Relatividad General, el marco que mejor describe a día de hoy la interacción gravitatoria, la fuerza que domina los procesos a escalas cosmológicas. Más allá de la solidez y la consistencia de la Física que supondría la cuantización de la gravedad, el problema que debe abordar la comunidad de físicos teóricos es elaborar una descripción de la teoría einsteiniana de la evolución del Universo que no tenga los problemas relativos a las singularidades, como el Big Bang o las que aparecen en el interior de los agujeros negros [43, 44], y que incorpore la naturaleza cuántica en la geometría del espacio y el tiempo. Este tipo de singularidades predichas por la Relatividad General suponen una incompletitud donde se pierde la predictibilidad física. La inclusión de fenómenos cuánticos en la geometría debe conducir pues a una nueva visión del Universo, con consecuencias en su origen y su evolución. No obstante, estas consecuencias deben coexistir con un comportamiento tan clásico como el que observamos a escalas cosmológicas. Es más, ofrecer una explicación para el régimen (semi-)clásico de nuestro Universo constituye un verdadero desafío para cualquiera de las teorías propuestas de gravedad cuántica.

El hecho de que la gravedad se explique como resultado de la deformación del espacio-tiempo hace que el tratamiento para su cuantización sea especialmente difícil y por ello todavía no se tenga una teoría completa y satisfactoria. Las dificultades son técnicas – la Relatividad General es una teoría no lineal –, pero también hay que afrontar ciertos problemas conceptuales básicos. El primer obstáculo al que uno se enfrenta cuando quiere cuantizar la Relatividad General de Einstein es que no es una teoría renormalizable, de manera que no se puede utilizar un método de cuantización perturbativa convencional. Además, las técnicas usuales de Teoría Cuántica de Campos parten de un espacio-tiempo de fondo dado. Sin embargo, en la gravedad, el espacio-tiempo es un campo dinámico por sí mismo y, por lo tanto, es el objeto que se pretende cuantizar. Hablamos de *cuantizar* el espacio y el tiempo, y en el sentido más fundamental, no sabemos plenamente lo que esto significa.

La carencia de una estructura de fondo conduce a considerar una teoría naturalmente invariante bajo difeomorfismos del espacio-tiempo [44]. Puesto que los métodos perturbativos tradicionales de teoría de campos fracasan al aplicarlos a la cuantización de la gravedad, y a la luz del éxito de las formulaciones no perturbativas para teorías de campos de Yang-Mills, durante los años ochenta se propuso un programa de cuantización gravitatoria no perturbativa independiente de estructuras de fondo: la Gravedad Cuántica de Lazos. El propósito es construir una teoría de *geometría cuántica* en la que los objetos geométricos, tales como la longitud, el área y el volumen – información métrica fundamental de la Relatividad General –, aparezcan como operadores que actúan sobre estados cuánticos. Esencialmente, la idea es empezar con una reformulación canónica de la teoría clásica de Einstein y aplicar un programa de cuantización [85].

La aplicación de estos métodos en escenarios cosmológicos es de especial importancia, tanto para verificar el formalismo de cuantización, como para extraer consecuencias físicas que pudieran llegar a ser observables. Los trabajos pioneros en Cosmología Cuántica de Lazos fueron desarrollados por M. Bojowald, que estudió la aplicación del formalismo de gravedad de lazos en una descripción de espacio-tiempos homogéneos [86]. En colaboración con A. Ashtekar y J. Lewandowski, también discutió aspectos más matemáticos de esta formulación, dotándola de un marco riguroso y permitiendo así su uso para construir una cuantización completa de espacio-tiempos homogéneos e isótropos (FLRW) [87]. Con este trabajo, se obtuvo por primera vez una descripción de los observables cuánticos y de los estados físicos, además de investigar la evolución cuántica.

El mayor reto hoy en día es la extracción de predicciones físicas en situaciones realistas. La gravedad no es una fuerza importante en el dominio microscópico, donde uno espera encontrar los efectos cuánticos. Y es por esto que aún no tenemos un sólo experimento u observación que requiera *genuinamente* de la gravedad cuántica para su explicación. Sin embargo, dicha teoría se antoja vital para el entendimiento de la física en situaciones con campos gravitacionales fuertes: procesos en el Universo primigenio, por ejemplo, y en la formación y evaporación de agujeros negros.

### 1.2.2. Formalismo clásico de Gravedad Cuántica de Lazos

La Gravedad Cuántica de Lazos es una cuantización canónica de la Relatividad General que parte del formalismo hamiltoniano que proporciona la descripción clásica de la teoría. Para ello, se consideran espacio-tiempos globalmente hiperbólicos, que admiten una función global de tiempo $t$, lo que permite exfoliar el espacio-tiempo $(g_{ab}, \mathcal{M})$ a través de una familia de superficies de Cauchy $\Sigma_t$ de tipo espacio [44, 88]. Aquí, los índices con letras del principio del alfabeto designan índices espacio-temporales. La variedad espacio-temporal estaría pues representada por la *historia* (evolución) de tales hipersuperficies: $\mathcal{M} = \cup_{t\in\mathbb{R}}\Sigma_t$. La métrica puede descomponerse como sigue: $g_{ab} = h_{ab} - n_a n_b$, donde $h_{ab}$ es la métrica espacial inducida sobre la hipersuperficie $\Sigma_t$ y $n_a$ se refiere al vector normal a ésta. Introduciendo un campo vectorial $t^a$, tal que $t^a\nabla_a t = 1$, resulta natural definir $n_a = -N\nabla_a t$, orientado en la dirección de flujo del tiempo creciente. En esta expresión, $\nabla$ es la derivada covariante compatible con la métrica $g_{ab}$, y la función lapso $N$ se introduce con el fin de normalizar el vector normal. Por otro lado, denominamos vector desplazamiento $N^a$ a la proyección de $t^a$ sobre $\Sigma_t$. Cabe hacer notar que tanto la función lapso como el vector desplazamiento son cantidades no dinámicas: en realidad, al pasar a la formulación hamiltoniana se obtiene una teoría completamente ligada, donde los grados de libertad físicos están dados por la métrica espacial $h_{ab}$ [44]. Las cantidades $N$ y $N^a$ resultan ser multiplicadores de Lagrange que acompañan a las cuatro ligaduras presentes en la acción que codifican la covariancia general de la teoría: una ligadura escalar o hamiltoniana y tres ligaduras de momentos o de difeomorfismos espaciales.

La curvatura extrínseca, $K_{ab}$, definida esencialmente como la derivada de Lie de la métrica espacial a lo largo del vector unitario normal a las superficies espaciales, es el elemento que resta para completar la construcción geométrica de la exfoliación y la dinámica de la tres-geometría. Ésta indica la forma en cómo se curvan las hipersuperficies $\Sigma_t$ con respecto a $\mathcal{M}$ [88].

La idea original que presentó A. Ashtekar [89], y de la cual surgió la gravedad de lazos, es reescribir la teoría de Relatividad General con el lenguaje de una teoría gauge, en términos de una conexión y su momento canónicamente conjugado. En particular, si uno quiere permitir el acoplo de fermiones en este marco, debemos reemplazar la métrica espacial por la co-tríada, $e^i_a$, definida a partir de la relación $h_{ab} = e^i_a e^j_b \delta_{ij}$. El acoplo tiene lugar a través de un índice interno $SU(2)$ (representado por los índices latinos de la mitad del alfabeto), introduciendo así nuevos grados de libertad en la teoría. A cambio, en esta formulación de la Relatividad General, además de las ligaduras de difeomorfismos espaciales y la escalar hamiltoniana, se deben satisfacer tres ligaduras de gauge que fijan la libertad de rotaciones internas. La métrica euclídea $\delta_{ij}$ que aparece es la métrica de Cartan-Killing de $SU(2)$. Una vez definida la co-tríada, se introduce la tríada $e^a_j$ como su inversa y la tríada densitizada $E^a_i = \sqrt{h} e^a_j$, donde $h$ es el determinante de la tres-métrica espacial. A su vez, la conexión de Ashtekar-Barbero [90], se construye mediante la suma de la curvatura extrínseca en su forma triádica, $K^i_a = K_{ab} e^b_j \delta_{ij}$, y una conexión de espín, $\Gamma^j_b$, compatible con la tríada densitizada, en el sentido de que la derivada covariante se anula. En este punto, es conveniente recordar que la conexión da cuenta del transporte paralelo, de manera que, recoge información de cómo se ve afectada la materia por el campo gravitacional. Así pues, definimos la conexión $su(2)$ como $A^i_a = \Gamma^i_a + \gamma K^i_a$, donde $\gamma$ es una constante real positiva que se conoce como parámetro de Immirzi [91, 92], cuya presencia puede ser interpretada como una ambigüedad en la cuantización. El nuevo par canónico cumple el siguiente corchete de Poisson

$$\left\{ A^i_a(x), E^b_j(y) \right\} = 8\pi G \gamma \delta^b_a \delta^i_j \delta(x-y), \tag{1.2.1}$$

donde $G$ es la constante de Newton y $\delta(x-y)$ es la distribución delta de Dirac en tres dimensiones.

En estas variables, las ligaduras de gauge $SU(2)$, de difeomorfismos espaciales y la hamiltoniana tienen, respectivamente, las siguientes expresiones:

$$\mathcal{G}_i = \partial_a E^a_i + \epsilon_{ijk} \Gamma^j_a E^{aK} = 0, \tag{1.2.2}$$

$$\mathcal{C}_a = F^i_{ab} E^b_i = 0 \tag{1.2.3}$$

$$\mathcal{C} = E^a_i E^b_j \left[ \epsilon^{ij}_k F^k_{ab} - 2(1+\gamma^2) K^i_{[a} K^j_{b]} \right] = 0. \tag{1.2.4}$$

Los corchetes indican antisimetrización de índices, y $F^i_{ab}$ es el tensor de curvatura de la conexión de Ashtekar-Barbero

$$F^i_{ab} = 2\partial_{[a} A^i_{b]} + \epsilon^i_{jk} A^j_a A^k_b \tag{1.2.5}$$

Puesto que las divergencias más significativas en este formalismo provienen de la función delta que aparece en el corchete de Poisson (1.2.1), y éste sólo tiene sentido como distribución, es conveniente realizar un suavizado espacial de las variables. Las simetrías de nuestro sistema gravitacional incluyen las transformaciones del grupo $SU(2)$; por tanto, sólo la información sobre la conexión que sea invariante bajo estas transformaciones de gauge será físicamente relevante. Teniendo en cuenta que esta información está codificada en los denominados lazos de Wilson, parece natural considerar las holonomías de la conexión $A$ a lo largo de caminos cerrados. Formalmente, dado un camino $e$, la holonomía asociada se define como

$$h_e(A) = \mathcal{P} \exp \int_e dx^a A^i_a \tau_i. \tag{1.2.6}$$

Aquí, el símbolo $\mathcal{P}$ es el operador de ordenación de camino y $\tau_i$ son los generadores del grupo $SU(2)$, $\tau_i = -\frac{1}{2}\sigma_i$ (con $i = 1, 2, 3$), donde $\sigma_i$ son las matrices de Pauli. La variable conjugada a la holonomía viene dada por el flujo de $E^a_i$ a través de una superficie $S$, suavizado con una función de prueba $f^i$ que toma valores en SU(2),

$$E(S, f) = \int_S f^i E^a_i \epsilon_{abc} dx^b dx^c. \tag{1.2.7}$$

Las holonomías y los flujos que hemos definido forman álgebra con los corchetes de Poisson y, a partir de ahora, definirán el espacio de fases del sistema. Otra ventaja de utilizar estas variables es que su definición no requiere la introducción de estructuras métricas de fondo. Desde esta perspectiva, el proceso de cuantización se centrará en construir una representación cuántica de nuestra álgebra como un álgebra de operadores actuando sobre un espacio de Hilbert. Uno de los resultados más poderosos en Gravedad Cuántica de Lazos es el teorema de unicidad para la representación, conocido como teorema LOST (por las iniciales de sus autores) [93]. El teorema garantiza, con pocas hipótesis extra, que existe una única elección de la representación cíclica del álgebra de holonomías que soporte una representación de los flujos y presente un estado invariante bajo difeomorfismos (el cuál se puede interpretar como un estado de vacío). Dicha representación resulta no ser continua y, como consecuencia, la conexión no está bien definida como operador.

### 1.2.3. Cosmología Cuántica de Lazos homogénea e isótropa

Cuando particularizamos este formalismo al modelo de FLRW plano, si las secciones espaciales $\Sigma_t$ no son compactas, algunas integrales divergen debido a la homogeneidad. Para evitar este problema, limitaremos la cuantización a una celda finita $\mathcal{V}$, de manera que el estudio de esta celda reproducirá lo que ocurre en el espacio-tiempo completo. Se puede comprobar que, con una prescripción de cuantización adecuada, los resultados no dependen de la elección concreta de dicha celda. En el caso de tener isotropía, y con una elección conveniente de gauge y de la libertad bajo difeomorfismos, la conexión y la tríada densitizada se pueden describir mediante dos parámetros dinámicos, c y p, respectivamente, de modo que

$$A_a^i = cV_o^{-1/3}\,{}^o e_a^i, \qquad E_i^a = pV_o^{-2/3}\sqrt{{}^o q}\,{}^o e_i^a. \tag{1.2.8}$$

En estas expresiones se ha hecho uso de una co-tríada fiducial ${}^o e_a^i$ diagonal. Estas variables satisfacen los corchetes de Poisson

$$\{c, p\} = \frac{8\ \ G\gamma}{3}. \tag{1.2.9}$$

Para definir las holonomías de las conexiones, debido a la elevada simetría del modelo, es suficiente considerar aristas rectas orientadas en las direcciones fiduciales, de longitud $\mu V_o^{1/3}$. De este modo, la holonomía en la dirección $i$-ésima está dada por

$$h_{{}^o e_i}(c) = \cos\left(\frac{\mu c}{2}\right)\mathbb{1} + 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\mu c}{2}\right)\tau_i. \tag{1.2.10}$$

Las holonomías están completamente determinadas por sus elementos de matriz, que son exponenciales complejas, $\mathcal{N}_\mu(c) := \exp(i\mu c/2)$. Éstas generan el álgebra de configuración de la parte gravitacional que, dado que $\mu$ es un número real arbitrario, corresponde al álgebra de funciones cuasi-periódicas de $c$.

Por otro lado, consideramos los flujos ortogonales a través de las superficies cuadradas que forman las direcciones fiduciales, cuyo valor es proporcional a $p$. De esta forma, el espacio de fases gravitatorio para el modelo de FLRW queda definido mediante las variables $\mathcal{N}_\mu(c)$ y $p$.

En nuestro modelo, el contenido material está dado por un campo escalar $\phi$ sin masa, mínimamente acoplado a la geometría, que junto con su momento canónicamente conjugado, ${}_\phi$, verifican los corchetes de Poisson $\{\phi,\ {}_\phi\} = 1$.

### Espacio de Hilbert cinemático

Para representar el álgebra de holonomías y flujos del sector gravitatorio del espacio de fases, se utiliza una *representación polimérica*, imitando la cuantización implementada en Gravedad Cuántica de Lazos. De acuerdo a nuestros comentarios anteriores, el álgebra de configuración está formada por el espacio lineal de funciones complejas continuas y acotadas de la conexión $c$ sobre $\mathbb{R}$, dada como la suma finita de elementos de matriz de las holonomías, $f(c) = \sum_n f_n e^{i\mu c}$. Completando esta álgebra con respecto a la norma del supremo se obtiene el álgebra $C^*$ de Bohr de funciones cuasiperiódicas [94]. Ésta puede identificarse con el álgebra de funciones continuas sobre la compactificación de Bohr de la recta real $\mathbb{R}_{Bohr}$, la cual puede verse como el grupo de homomorfismos que lleva del grupo aditivo de la recta real al grupo multiplicativo de los números complejos de módulo unidad. Se puede demostrar, de hecho, que este grupo es compacto y conmutativo [94]. Como consecuencia, las funciones consistentes en la evaluación en un punto en $\mathbb{R}_{Bohr}$ conforman una base ortonormal en el correspondiente espacio de Hilbert de funciones de cuadrado integrable con la norma definida a través de la única medida de Haar, $d\mu_H$, invariante bajo el grupo $\mathbb{R}_{Bohr}$, esto es, $L^2(\mathbb{R}_{Bohr}, d\mu_H)$ [94]. Dicha representación no es continua, por lo que no existe un operador que represente a la variable $c$. Sin embargo, esta base nos permite pasar de nuestra representación de configuración a una representación más sencilla sobre el espacio de momentos (correspondiente a los flujos $p$ [94]). Empleamos por tanto una base conveniente del espacio de Hilbert formada por los autoestados $|\mu\rangle$ de la tríada densitizada, con $\mu \in \mathbb{R}$, y ortonormales con respecto al producto interno discreto $\langle\tilde{\mu}|\mu\rangle = \delta_{\mu}^{\tilde{\mu}}$, sobre la cual los operadores fundamentales actúan de la forma[1]

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mu'}|\mu\rangle = |\mu + \mu'\rangle, \qquad \hat{p}|\mu\rangle = \frac{4\ \ G\gamma}{3}\mu|\mu\rangle, \tag{1.2.11}$$

Designaremos dicho espacio de Hilbert como $\mathcal{H}_{grav}$. Hacemos notar, además, que no es un espacio separable, puesto que los estados $|\mu\rangle$ forman una base no numerable. Como podemos ver, el espectro del operador de holonomía no es continuo, debido al producto interno discreto. Por tanto, es evidente que la representación es inequivalente a la estándar de tipo Schrödinger que se obtiene en Geometrodinámica [95]. Es precisamente esta falta de continuidad la que hace que, en este contexto, no sea aplicable el teorema de Stone-von Neumann sobre la unicidad de la representación para Mecánica Cuántica [96], permitiendo así que los resultados físicos de la cuantización de lazos sean radicalmente distintos respecto a los que se deducen de la teoría de Wheeler-DeWitt.

Por otro lado, para el contenido material es habitual utilizar una representación de Schrödinger, en la cual el operador $\hat{\phi}$ representante del campo actúa por multiplicación, mientras que el operador del momento actúa por derivación, $\hat{\ }_{\phi} = -i\partial_{\phi}$, ambos definidos sobre el espacio de Hilbert dado por las funciones de cuadrado integrable con respecto a la medida de Lebesgue, $\mathcal{H}_{mat} = L^2(\mathbb{R}, d\phi)$.

El espacio de Hilbert cinemático total es, pues, $\mathcal{H}_{grav} \otimes \mathcal{H}_{mat}$. Nótese que los operadores básicos introducidos están definidos en el producto tensorial de ambos sectores, actuando como la identidad en el sector del cual no dependen.

[1] Por simplicidad, en toda la memoria, fijamos la velocidad de la luz y la constante de Planck reducida iguales a la unidad, $c = \hbar = 1$.

### Operador ligadura Hamiltoniana

En cosmología homogénea, las ligaduras de momento y las de gauge se satisfacen de forma inmediata debido a la gran simetría del modelo. De modo que, clásicamente, la ligadura hamiltoniana será la única superviviente [ver la ecuación (1.2.4)]. Asimismo, dado que la conexión de espín se anula para espacio-tiempos de FLRW planos, la parte gravitatoria de la ligadura Hamiltoniana total viene dada por

$$C_{grav}^{FLRW} = -\frac{1}{2\gamma^2}\int_{\mathbb{R}} d^3x \frac{\epsilon_k^{ij} E_i^a E_j^b F_{ab}^k}{\sqrt{|E|}}. \tag{1.2.12}$$

La ligadura total (suma de ésta y la contribución material) resulta ser

$$C^{FLRW} = -\frac{6}{\gamma^2}\sqrt{|p|}c^2 + \frac{{}^{2}_{\phi}}{2}. \tag{1.2.13}$$

Como la conexión no está bien definida en la teoría cuántica, la expresión clásica de la ligadura hamiltoniana no se puede traducir directamente a un operador. Por ello, regresaremos a la expresión de partida (1.2.12) y expresaremos el tensor de curvatura en función de las holonomías, a saber,

$$F_{ab}^k = -2\lim_{\mu\to 0} tr\left(\frac{h^{\mu}_{\square_{ij}}(c) - 1}{\mu^2\ \ {}^{2/3}}\tau^k\ \ e^i_{\ a}\ \ e^j_{\ b}\right), \tag{1.2.14}$$

donde $\square_{ij}$ denota un cuadrado en el plano $i$-$j$ y, por tanto,

$$h^{\mu}_{\square_{ij}} = h^{\mu}_{\ e_i} h^{\mu}_{\ e_j} (h^{\mu}_{\ e_i})^{-1} (h^{\mu}_{\ e_j})^{-1}. \tag{1.2.15}$$

De inmediato nos damos cuenta de que esta forma de expresar la curvatura de la conexión no soluciona el problema, puesto que el límite $\mu \to 0$ no está bien definido en la teoría cuántica, debido precisamente a la discontinuidad de la representación. Esta coyuntura se interpreta como una manifestación del hecho de que, en la cuantización de lazos, el espectro del operador del área es discreto con un autovalor mínimo distinto de cero y, por tanto, el área del cuadrado no puede contraerse hasta ser igual a cero. En Gravedad Cuántica de Lazos, este obstáculo se evita apelando a la invariancia bajo difeomorfismos; sin embargo, este procedimiento no puede importarse al caso que nos ocupa porque la ligadura de difeomorfismos ya ha sido fijada. La solución que se propuso consiste en evaluar la expresión (1.2.14) cuando el área física del cuadrado es igual al menor autovalor no nulo del operador área permitido en Gravedad Cuántica de Lazos, $\Delta$. Esto es, $\mu = \bar{\mu}$, tal que se cumple $\bar{\mu}^2|p| = \Delta$. Al margen de nuestra discusión, un apunte histórico es conveniente. Los primeros intentos por regularizar la ligadura hamiltoniana asumían que la longitud mínima fiducial era simplemente una constante. Sin embargo, los resultados físicos no eran razonables, en tanto en cuanto las correcciones cuánticas de la geometría podían ser dominantes incluso en regímenes de baja curvatura o densidades de materia arbitrariamente pequeñas, en los que cabía esperar un comportamiento clásico enmarcado dentro de la Relatividad General [26]. La nueva prescripción, que se conoce como *dinámica mejorada*, no presenta ese inconveniente [27]. No obstante, aparece un nuevo obstáculo que debemos tener en cuenta. El paso que hemos dado introduce una cierta no-localidad en el formalismo, debido a la dependencia de $\bar{\mu}$ con el estado particular que consideremos. Por ello, es conveniente llevar a cabo una transformación canónica en el espacio de fases de la geometría, tal que éste pasa a ser descrito por la variable $\beta = \bar{\mu}c$ y su canónica conjugada $v(p) = \text{sgn}(p)|p|^{3/2}/(2\ \ G\gamma\sqrt{\Delta})$, con $\{\beta, v\} = 2$. Así, introduciendo el operador $\hat{v}$ con acción $\hat{v}|v\rangle = v|v\rangle$, encontramos que

$$\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}}|v\rangle = |v+1\rangle. \tag{1.2.16}$$

Cabe señalar que el parámetro $v$ tiene una interpretación geométrica directa: $\hat{\ } = |\hat{p}|^{3/2}$, de manera que

$$\hat{\ }|v\rangle = 2\ \ G\gamma\sqrt{\Delta}|v||v\rangle. \tag{1.2.17}$$

Es decir, su valor es proporcional al volumen físico de la celda fiducial $\mathcal{V}$.

Para poder expresar la ligadura (1.2.13) como un operador encontramos una dificultad adicional que concierne al inverso del volumen que aparece en la parte material. Puesto que el operador $\hat{p}$ tiene al autovalor nulo en su espectro discreto, no es posible definir ninguna potencia negativa de éste a través del teorema espectral.

De nuevo, siguiendo el procedimiento llevado a cabo en Gravedad Cuántica de Lazos, podemos regularizar dichas cantidades a partir de la identidad clásica

$$\frac{\text{sgn}(p)}{\sqrt{|p|}} = \frac{4}{\gamma\bar{\mu}}\, tr\left(\sum_{i=1}^{3}\tau^i h^{\bar{\mu}}_{e_i}\{(h^{\bar{\mu}}_{e_i})^{-1}, \sqrt{|p|}\}\right), \qquad \forall\bar{\mu}\in\mathbb{R}. \tag{1.2.18}$$

Así, reemplazando las funciones del miembro derecho por sus operadores correspondientes, y el corchete de Poisson por $-i$ veces el conmutador, obtenemos

$$\left[\widehat{\frac{\text{sgn}(p)}{\sqrt{|p|}}}\right] = \frac{3}{4\ \ G\gamma\sqrt{\Delta}}|\hat{p}|^{1/2}\Big(\hat{\mathcal{N}}_{-\bar{\mu}}|\hat{p}|^{1/2}\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}}|\hat{p}|^{1/2}\hat{\mathcal{N}}_{-\bar{\mu}}\Big). \tag{1.2.19}$$

De esta forma, se define el operador inverso de volumen regularizado como

$$\left[\widehat{\frac{1}{\ }}\right] = \left[\widehat{\frac{\text{sgn}(p)}{\sqrt{|p|}}}\right]^3. \tag{1.2.20}$$

Este operador actúa de forma diagonal en la base de estados $|v\rangle$. Sorprendentemente, además, es acotado, desapareciendo así la divergencia clásica para $v = 0$ en el nivel cuántico. De hecho, el operador aniquila el estado $|v = 0\rangle$.

Teniendo en cuenta esto, para representar la ligadura hamiltoniana (1.2.13) únicamente necesitamos escoger una ordenación de operadores simétrica adecuada para la parte gravitatoria. En la literatura se pueden encontrar distintas prescripciones [27–29, 97–99]. Aunque se ha mostrado con cálculos númericos que, para distintas prescripciones, se obtienen predicciones físicas compatibles si se consideran estados semiclásicos [29], la estructura matemática a la que conducen es distinta. Aquí, adoptaremos la prescripción conocida como *MMO simplificada* [28], con la que se obtiene

$$\hat{C}^{FLRW} = \widehat{\left[\frac{1}{\ }\right]}^{1/2} \left( -\frac{3}{8\ \ G\gamma^2}\hat{\Omega}_0^2 + \frac{\hat{\ }^2_{\phi}}{2} \right) \widehat{\left[\frac{1}{\ }\right]}^{1/2}, \tag{1.2.21}$$

siendo

$$\hat{\Omega}_0 = \frac{1}{4i\sqrt{\Delta}} \hat{\ }^{1/2}[\widehat{\mathrm{sgn}(v)}, \hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}}]_+ \hat{\ }^{1/2} \tag{1.2.22}$$

el operador que representa la cantidad $\Omega_0 = \mathrm{sgn}(v)\,\mathrm{sen}(\bar{\mu}c)\quad /\sqrt{\Delta}$, teniendo en cuenta que $\widehat{\mathrm{sen}(\bar{\mu}c)} = i(\hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}})/2$, y donde hemos utilizado el anticonmutador $[\cdot,\cdot]_+$.

La elección de esta simetrización para la representación del operador de ligadura hamiltoniana resulta ser muy conveniente debido a que la actuación de este operador aniquila los estados de volumen cero y deja invariante su complemento ortogonal. Por tanto, los estados análogos a la singularidad clásica se desacoplan de la teoría de forma natural y se puede restringir el estudio al espacio de Hilbert donde ya se ha eliminado el estado de volumen cero.

En la práctica, una vez realizado ese desacoplo, es más sencillo trabajar directamente con el operador de *ligadura hamiltoniana densitizada*, definido como

$$\hat{C}^{FLRW} = -\frac{3}{8\ \ G\gamma^2}\hat{\Omega}_0^2 + \frac{\hat{\ }^2_{\phi}}{2}. \tag{1.2.23}$$

De esta forma, los operadores $\hat{\Omega}_0^2$ y $\hat{\ }^2_{\phi}$ son observables de Dirac que conmutan con el operador de ligadura densitizada. Las dos versiones consideradas del operador de ligadura conducen a resultados equivalentes y su relación, así como la existente entre sus soluciones, está bien definida a través de un proceso de densitización [28].

### Actuación del operador $\hat{\Omega}_0$

El operador $\hat{\Omega}_0^2$, y por consiguiente $\hat{C}^{FLRW}_{grav}$, es un operador en diferencias de segundo orden de paso cuatro. Además, gracias al desacoplo del estado de volumen cero, no intercambia estados con valores positivos y negativos de la variable $v$, correspondientes a orientaciones opuestas de la tríada. Por ello, la acción de este operador preserva cada uno de los subespacios $\mathcal{H}_\epsilon^\pm$ del espacio de Hilbert gravitacional con soporte en las semirredes:

$$\mathcal{L}_{|\epsilon|^\pm} = \{v = \pm(|\epsilon| + 4n), n \in \mathbb{Z}\}, \quad |\epsilon| \in (0, 4], \tag{1.2.24}$$

conocidos como *sectores de superselección*, $\mathcal{H}_\epsilon^\pm$, en tanto en cuando proporcionan representaciones irreducibles para los operadores que son físicamente relevantes en este modelo. Concretamente, la actuación sobre la base de estados $|v\rangle$ es de la forma

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}_0^2|v\rangle = &- f_+(v)f_+(v+2)|v+4\rangle + [f_+^2(v) + f_-^2(v)]|v\rangle \\ &- f_-(v)f_-(v-2)|v-4\rangle,\end{aligned} \tag{1.2.25}$$

con los coeficientes

$$f_\pm(v) = \frac{G\gamma}{2}[\mathrm{sgn}(v) + \mathrm{sgn}(v \pm 2)]\sqrt{|v|}\sqrt{|v \pm 2|}. \tag{1.2.26}$$

De la última expresión, se desprende que las funciones reales $f_+$ y $f_-$ se anulan en los intervalos $[-2, 0]$ y $[0, 2]$, respectivamente. Por tanto, la ligadura desacopla los distintos signos de $v$, como ya habíamos apuntado. Por conveniencia, restringiremos el estudio a sectores con $v > 0$, y sin pérdida de generalidad, fijaremos un cierto $\epsilon$. Así pues, el espacio de Hilbert cinemático total será $\mathcal{H}_\epsilon^+ \otimes \mathcal{H}_{mat}$.

Puede demostrarse que el operador en diferencias finitas $\hat{\Omega}_0^2$ es un operador esencialmente autoadjunto. Es más, para cada uno de los sectores de superselección, el operador tiene un espectro no degenerado y absolutamente continuo igual a la recta real positiva, $\mathbb{R}^+$ [28]. Sus autoestados generalizados, $|e_\lambda^\epsilon\rangle$, con autovalor $\lambda \in [0, \infty)$, quedan completamente determinados por la ecuación de autovalores a partir de su valor inicial en $\epsilon$, esto es, $e_\lambda^\epsilon(\epsilon)$. Para cada autofunción, este dato inicial se escoge como el número real positivo tal que $\langle e_\lambda^\epsilon | e_{\lambda'}^\epsilon \rangle = \delta(\lambda - \lambda')$.

Por su parte, el operador $\hat{\ }^2_\phi = -\partial_\phi^2$ es también esencialmente autoadjunto, con un espectro doblemente degenerado y absolutamente continuo igual a la semirrecta real positiva. Sus autofunciones generalizadas están dadas por las ondas planas, $e^{\pm i\omega\phi}$, con autovalor $\omega^2$ positivo.

### Estados físicos

Una vez realizado el análisis espectral del operadores presentes en la ligadura hamiltoniana densitizada, (1.2.23), es posible expandir las soluciones de la ligadura en dicha base, a saber,

$$\Psi(\phi, v) = \int_0^\infty d\lambda\, e_\lambda^\epsilon(v)[\psi_+(\lambda)e^{+i\omega(\lambda)\phi} + \psi_-(\lambda)e^{-i\omega(\lambda)\phi}]. \tag{1.2.27}$$

Para poder interpretar los resultados físicos necesitamos definir un concepto de evolución temporal. Para ello, en estos escenarios, es habitual considerar el campo $\phi$ como un tiempo interno emergente [26]. De esta forma, podemos identificar los estados físicos con las soluciones de frecuencia positiva $_{+}(\ )$ [o negativa $_{-}(\ )$].

Un conjunto completo de observables de Dirac (actuando sobre los estados físicos) está formado por la constante de movimiento $\hat{}_{\phi}$ y el volumen en $\phi = \phi_0$, que designaremos como $|\hat{v}|_{\phi_0}$.

### Rebote cuántico

Una vez completada la cuantización del modelo, la dinámica efectiva permite estudiar en un esquema más manejable las predicciones físicas de la teoría cuántica. En la práctica, la receta para obtener la ligadura hamiltoniana efectiva se puede resumir de una manera muy simple [45]: basta con sustituir los operadores fundamentales por las correspondientes variables clásicas, teniendo cuidado en asignar al operador de holonomía $\widehat{\mathrm{sen}(\bar{\mu}c)}$ la contrapartida $\mathrm{sen}(\bar{\mu}c)$, en vez de su límite $\bar{\mu}c$ para curvaturas extrínsecas pequeñas, que nos devolvería a la teoría einsteiniana sin ningún tipo de modificación. Se espera que este tipo de teoría clásica *corregida* capture las características esenciales de la cuantización cuando se consideran ciertos estados físicos de especial interés, esto es, aquéllos que tienen un comportamiento semiclásico en las regiones de volúmenes espaciales grandes, de forma que puedan ser vistos como soluciones realistas que expliquen las propiedades del Universo que observamos hoy en día. En particular, se estudian perfiles gaussianos picados en un instante de tiempo tardío (valores grandes de $\phi$) en ciertos valores grandes de los observables fundamentales del modelo (el momento del campo y el volumen físico). Como ya avanzamos en la sección anterior, el análisis numérico de la evolución de este tipo de estados mostró un nuevo fenómeno cuántico que lleva a la resolución dinámica de la singularidad inicial (o Big Bang), reemplazándola por un *rebote cuántico* que conecta dos ramas del Universo: una en contracción y otra en expansión. En ambas se recupera rápidamente una evolución dictada por las ecuaciones de la teoría clásica de Relatividad General. Además, se ha visto que los estados semiclásicos considerados se mantienen picados sobre una trayectoria bien definida durante toda la evolución, mostrando así que la resolución dinámica de la singularidad es un proceso determinista. Remarcamos que, como cabía esperar, la trayectoria sólo se desvía de aquélla predicha por la Relatividad General cuando la densidad $\rho$ de energía material se acerca a una densidad crítica del orden de la densidad de Planck $\rho_{Planck}$. En más detalle, las desviaciones aparecen en torno a la densidad crítica $\rho_{crit} \approx 0{,}41\rho_{Planck}$. En las regiones cercanas al rebote la gravedad actúa como una fuerza repulsiva, debido a los efectos cuánticos de la geometría, y es precisamente cuando $\rho$ alcanza esa densidad crítica cuando ocurre el rebote.

## 1.3. Cuantización de Fock de un campo escalar

El segundo pilar del formalismo híbrido es la cuantización de tipo Fock para las inhomogeneidades. Como es sabido, en espacio-tiempos curvos no estacionarios no existe un criterio establecido para seleccionar una representación cuántica de las reglas de conmutación canónicas [100]. En general, existen infinitas posibilidades que no son equivalentes entre sí. Esto resta solidez al proceso, ya que cada una de las representaciones ofrece una teoría cuántica diferente, que nos conduce a predicciones físicas distintas. Con el fin de eliminar esta ambigüedad, en la primera parte de esta tesis estudiaremos el caso de un campo escalar con una masa dependiente del tiempo propagándose sobre un espacio-tiempo homogéneo e isótropo. Demostraremos que la selección de la representación de Fock es en realidad única, salvo transformaciones unitarias, si se adopta el criterio de imponer la invariancia del estado de vacío bajo el grupo de simetrías espaciales de la ecuación de campo y se exige que la dinámica del sistema sea unitaria, a pesar de la no estacionariedad de las ecuaciones de campo.

Por ello, vamos a introducir a continuación los elementos básicos para construir la cuantización de Fock de un campo escalar, y así llegar a la condición bajo la cual dos cuantizaciones de Fock son unitariamente equivalentes. Más en general, presentaremos la condición necesaria para implementar una transformación de Bogoliubov de manera unitaria.

### 1.3.1. Espacio de fases y observables

Como ya hemos podido ver en la sección anterior, en la formulación hamiltoniana de la mecánica clásica, un sistema físico suele describirse mediante un espacio de fases $\Gamma$. Este espacio contiene la información sobre todos los posibles estados del sistema. Matemáticamente, el espacio de fases es una variedad simpléctica diferenciable (de mayor o menor orden, dependiendo del caso). Habitualmente, las coordenadas canónicas (locales) de cada punto representan las posiciones generalizadas y sus momentos conjugados correspondientes, y especifican uno de los posibles estados del sistema.

Consideramos un campo escalar real $\phi$ con masa propagándose sobre un espacio-tiempo $\mathcal{M}$ globalmente hiperbólico dotado con la métrica $g_{ab}$. Una acción clásica para este campo es:

$$S = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}(\nabla_a\phi\nabla^a\phi + m^2\phi^2), \tag{1.3.1}$$

donde $g$ es el determinante del tensor métrico. A partir de ella se deduce la ecuación de evolución

$$(\nabla_a\nabla^a + m^2)\phi = 0, \tag{1.3.2}$$

que no es más que la ecuación de tipo Klein-Gordon para un espacio-tiempo curvo. Como ya sabemos, por ser $\mathcal{M}$ globalmente hiperbólico, éste admite una función global de tiempo $t$ y una exfoliación en hipersuperficies de Cauchy, definidas para cada instante de tiempo. De esta forma, dados los valores de $\phi$ y de su derivada normal $\nabla_n\phi := n^a\nabla_a\phi$ sobre una hipersuperficie de Cauchy $\Sigma_0$, la ecuación de Klein-Gordon tiene una solución única definida en todo el espacio-tiempo.

El momento canónico conjugado de una solución de la ecuación de movimiento $\phi$ está dado por

$$= \frac{\delta S}{\delta\dot{\phi}} = \sqrt{h}\nabla_n\phi, \tag{1.3.3}$$

donde $h$ es el determinante de la métrica inducida en $\Sigma$. Entonces, el espacio de fases $\Gamma$ del sistema puede entenderse como el espacio vectorial de pares $(\phi, \ )$. En otras palabras, un punto en el espacio de fases $\Gamma$ viene dado por la especificación de las funciones $\phi(\vec{x})$ y $(\vec{x})$ sobre una de las hipersuperficie de Cauchy. Asimismo, al tener un problema de Cauchy bien puesto, podemos identificar el espacio de soluciones $\mathcal{S}$ de la ecuación de movimiento (1.3.2) con el espacio de fases $\Gamma$, visto como el espacio de datos iniciales sobre cierta hipersuperficie $\Sigma_0$. Además, se puede demostrar que el espacio de soluciones $\mathcal{S}$ será el mismo, independientemente de la elección de $\Sigma_0$. Es sencillo ver, pues, que la evolución en el tiempo $t$ en el espacio de fases $\Gamma$ es equivalente a la evaluación del elemento asociado del espacio de soluciones $\mathcal{S}$ sobre la correspondiente superficie de Cauchy $\Sigma_t$.

Sobre este espacio, definimos una estructura simpléctica $\Omega$ como la aplicación bilineal y antisimétrica que, actuando sobre dos vectores $(\phi_1, \ _1)$ y $(\phi_2, \ _2)$ de $\Gamma$, viene dada por

$$\Omega[(\phi_1, \ _1), (\phi_2, \ _2)] = \int_\Sigma ( \ _1\phi_2 - \ _2\phi_2) d^3x, \tag{1.3.4}$$

siendo $\Sigma$ una hipersuperficie de Cauchy cualquiera. La estructura simpléctica es independiente del tiempo si la hipersuperficie $\Sigma$ no tiene borde o si los campos (o, equivalentemente, sus datos de Cauchy) cumplen condiciones de contorno adecuadas en dicho borde, incluido el caso en el que se trate de una región asintótica. En tales circunstancias, la estructura permanece invariante en la evolución temporal del sistema.

La estructura simpléctica proporciona los corchetes de Poisson:

$$\{\phi(\vec{x},t), \phi(\vec{x}',t)\} = \{ \ (\vec{x},t), \ (\vec{x}',t)\} = 0, \quad \{\phi(\vec{x},t), \ (\vec{x}',t)\} = \delta^3(\vec{x}-\vec{x}'). \tag{1.3.5}$$

Los corchetes de Poisson dotan al conjunto de observables físicos, entendidos como el espacio de funciones $C^\infty(\Gamma, \mathbb{R})$, con la estructura de un álgebra de Lie.

### 1.3.2. Cuantización canónica

En términos generales, hemos visto que el proceso de cuantización es un procedimiento para representar los observables físicos de un sistema clásico como operadores que actúan sobre un espacio de Hilbert, en el que cada elemento (o, más bien, cada rayo) describe un estado distinto del sistema. Más en detalle, una vez descrito un sistema clásico mediante una variedad simpléctica $(\Gamma, \Omega)$, se puede definir el proceso de cuantización como la construcción de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que, al conjunto de observables medibles $C^\infty(\Gamma, \mathbb{R})$ (funciones suaves sobre $\Gamma$), se le asigna un conjunto de observables cuánticos representados por operadores lineales (señalados en general por el símbolo ˆ). El proceso debe tener en cuenta ciertas propiedades.

Así, los operadores observables deben ser autoadjuntos para que todos sus autovalores sean reales, ya que deben representar posibles medidas físicas. Además, la condición de Dirac para la cuantización nos dice que, dados dos observables $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, sus correspondientes representaciones deben conservar la estructura de los corchetes de Poisson. Esto es

$$[\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{B}}] = i\hbar\{\widehat{\mathcal{A}, \mathcal{B}}\}. \tag{1.3.6}$$

Sin embargo, no todos los observables pueden ser promovidos sin ambigüedades a operadores cuánticos de forma que cumplan las relaciones de conmutación canónicas. Lo que podemos hacer es elegir un subconjunto $\mathcal{O}$ completo de observables para el proceso de cuantización. La representación del conjunto $\mathcal{O}$ debe ser irreducible. Esto significa que, una vez construidos los operadores cuánticos, no puede existir ningún subespacio de $\mathcal{H}$ que sea invariante bajo la actuación de los operadores del conjunto. Los motivos para pedir irreducibilidad son los siguientes. Una vez que hayamos escogido el conjunto de observables clásicos y su correspondiente álgebra de corchetes de Poisson, queremos que su representación contenga la misma información que éste. En particular, queremos que sea completo, es decir, que el único operador que conmute con todos los operadores del conjunto sea múltiplo de la identidad. Y el lema de Schur nos asegura que éste es el caso si exigimos irreducibilidad. En otras palabras, si la representación fuese reducible, podríamos expresarla como suma directa de varias representaciones irreducibles que podríamos estudiar por separado y necesitaríamos información adicional que nos seleccionara una de ellas.

Por lo tanto, para construir una teoría de campos cuántica de la ecuación de Klein-Gordon, buscaremos una representación irreducible del campo y su momento conjugado mediante operadores autoadjuntos $\widehat{\phi}$ y $\widehat{\ }$ sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ que satisfagan las relaciones de conmutación canónicas correspondientes al álgebra de Poisson, de forma que

$$[\widehat{\phi}(\vec{x}, t), \widehat{\phi}(\vec{x}', t)] = [\widehat{\ }(\vec{x}, t), \widehat{\ }(\vec{x}', t)] = 0, \quad [\widehat{\phi}(\vec{x}, t), \widehat{\ }(\vec{x}', t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \tag{1.3.7}$$

### 1.3.3. Cuantización de Fock

En la cuantización de Fock, el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de la teoría se construye mediante la suma directa de los productos tensoriales (simetrizados en el caso de campos escalares) de copias del espacio de Hilbert para una "partícula" $\mathcal{H}_0$. Este espacio se denomina espacio de Fock y tiene por tanto la forma

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}_0) := \oplus_{n=0}^{\infty}(\otimes^n \mathcal{H}_0). \tag{1.3.8}$$

Como vemos, el espacio de Fock se obtiene a partir del espacio de una partícula. Éste, a su vez, se construye a partir de las soluciones de la ecuación de movimiento clásica, o de su espacio de condiciones iniciales correspondiente. En la construcción, el carácter lineal del espacio de soluciones desempeña un papel fundamental, y por ello el marco de aplicación natural de la cuantización de Fock para campos es el de teorías de campo lineales (por ejemplo, el campo de Klein-Gordon).

#### Espacio de Hilbert de una partícula

Para definir el espacio de Hilbert de una partícula basta con escoger una estructura compleja $J$ en el espacio de fases $\Gamma$, o en su contrapartida dada por el espacio de soluciones asociado $\mathcal{S}$ [100]. La estructura compleja es el objeto matemático que codifica la información que es físicamente relevante para la cuantización de Fock. Una estructura compleja es una transformación simpléctica real $J : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ cuyo cuadrado es menos la identidad y que es compatible con la estructura simpléctica, en un sentido que enseguida especificaremos. En más detalle, una estructura compleja es una transformación real que cumple las siguientes propiedades:

i) $J^2 = -1$.

ii) $J$ es un simplectomorfismo, esto es, $\Omega(J\cdot, J\cdot) = \Omega(\cdot, \cdot)$.

iii) $J$ es compatible con $\Omega$. A saber, $\Omega(J\cdot, \cdot)$ es definido positivo sobre el espacio de fases $\Gamma$, o equivalentemente sobre el de soluciones $\mathcal{S}$.

De esta forma, $(\cdot, \cdot) := \big(\Omega(J\cdot, \cdot) - i\Omega(\cdot, \cdot)\big)/2$ proporciona un producto interno.

A continuación, complexificamos el espacio de fases (o el de soluciones) y extendemos la actuación de $J$ y $\Omega$ mediante linealidad compleja. De acuerdo con la propiedad i), los autovalores de $J$ son $\pm i$, de forma que, mediante la descomposición espectral del espacio complexificado, podemos definir los dos subespacios ortogonales correspondientes a cada uno de los autovalores. Sean entonces

$$P := \frac{1}{2}(\mathbb{1} - iJ), \quad P^* := \frac{1}{2}(\mathbb{1} + iJ), \tag{1.3.9}$$

los proyectores ortogonales sobre tales subespacios. Completándolos con el producto interno $(\cdot,\cdot)$ obtenemos los espacios de Hilbert $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_0^*$, respectivamente. Llamaremos la parte de frecuencia positiva del campo $\phi$ a la que está compuesta por los elementos de la forma $\phi^+ = P\phi$, y la parte de frecuencia negativa a $\phi^- = P^*\phi$. Obviamente, $\phi = \phi^+ + \phi^-$, y además $\phi^- = (\phi^+)^*$ cuando imponemos que el campo $\phi$ sea real.

Llegados a este punto, existen dos visiones alternativas pero equivalentes del espacio de Hilbert para una partícula:

- $\mathcal{H}_0$ se obtiene a partir de las soluciones reales de la ecuación de campo –o de las condiciones iniciales que las determinan– una vez se las dota de la estructura compleja $J$.
- $\mathcal{H}_0$ puede identificarse con el subespacio de soluciones de frecuencia positiva, que son complejas.

Es importante notar que lo único que necesitamos para construir $\mathcal{H}_0$ a partir de nuestro espacio de fases, o de soluciones, es una estructura compleja $J$. La elección del espacio de Hilbert de una partícula, caracterizada por una estructura compleja, no es única y, en general, cada elección da lugar a una teoría cuántica distinta. Como veremos más adelante, estas cuantizaciones no tienen por qué ser unitariamente equivalentes entre sí. Concretamente, en el caso general de un espacio-tiempo curvo no estacionario, no existe un criterio establecido para seleccionar una única elección preferente de $\mathcal{H}_0$ y, por tanto, tendremos que enfrentarnos a un número infinito de cuantizaciones no equivalentes que surgen de la libertad que tenemos en la elección de $\mathcal{H}_0$, o lo que es lo mismo, en la elección de una estructura compleja $J$ determinada.

### Operadores de creación y aniquilación

Una vez hecha la elección del espacio de Hilbert de una partícula y dada una base ortonormal $\;_i$ de dicho espacio, que vemos aquí como el de soluciones complejas de frecuencia positiva, cualquier solución del campo se puede expresar como

$$\phi = \phi^+ + \phi^-, \quad \phi^+ = P\phi = \sum_i (a_i \quad _i), \tag{1.3.10}$$

es decir,

$$\phi = \sum_i (a_i \quad {}_i + a_i^* \quad {}_i^*), \tag{1.3.11}$$

donde los coeficientes $a_i^*$ y $a_i$ son las variables de creación y aniquilación, respectivamente, asociadas a la base ortonormal elegida. Usando esa ortonormalidad, no es difícil comprobar que los corchetes de Poisson canónicos entre el campo y su momento conducen a los siguientes corchetes para estas variables:

$$\{a_i, a_j^*\} = -i\delta_j^i, \quad \{a_i, a_j\} = \{a_i^*, a_j^*\} = 0. \tag{1.3.12}$$

Al proceder a cuantizar el sistema, las variables de creación y aniquilación pasan a estar representadas por operadores $\hat{a}_i^\dagger$ y $\hat{a}_i$, respectivamente, tal que los únicos conmutadores no nulos entre ellos son $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_j^i$. De esta forma, el campo viene representado cuánticamente como

$$\hat{\phi} = \sum_i (\hat{a}_i \quad {}_i + \hat{a}_i^\dagger \quad {}_i^*). \tag{1.3.13}$$

Finalmente, definimos el estado de vacío asociado a la representación dada como aquel estado normalizado $|0\rangle$ que es anulado por todos los operadores de aniquilación. Es decir, $|0\rangle \in \mathcal{H}$ es tal que

$$\langle 0|0\rangle = 1, \qquad \hat{a}_i|0\rangle = 0, \quad \forall i. \tag{1.3.14}$$

Los estados de una partícula se obtienen por la actuación de los operadores de creación sobre este estado de vacío. Esto incluye la actuación de combinaciones lineales de un número infinito de operadores de creación, siempre y cuando el estado resultante tenga norma finita.

### 1.3.4. Cuantizaciones equivalentes

Como ya hemos visto, el proceso de cuantización, como construcción de una representación de Fock de las relaciones de conmutación canónicas, queda determinado con la elección de la estructura compleja que hagamos. La cuestión que aquí queremos plantear es si dicha elección tiene consecuencias físicas. Es decir, si dada una elección de estructura compleja distinta, la teoría cuántica que se alcanza proporciona predicciones físicas que no son equivalentes a las anteriores.

En principio, diremos que dos representaciones irreducibles $(\mathcal{H}, \widehat{\phi})$ y $(\mathcal{H}', \widehat{\phi}')$, construidas a partir de las correspondientes estructuras complejas $J$ y $J'$ definidas sobre el espacio de soluciones del sistema (aunque podríamos considerar el espacio de fases de forma similar) son unitariamente equivalentes si y sólo si existe una aplicación unitaria $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ que satisface

$$\widehat{\phi}'(x) = \widehat{B}\widehat{\phi}(x)\widehat{B}^{-1}. \tag{1.3.15}$$

En este caso, los estados $|\ \ \rangle \in \mathcal{H}$ tienen las mismas propiedades físicas que los estados $|\ \ '\rangle = \widehat{B}|\ \ \rangle \in \mathcal{H}'$.

A continuación, analizaremos las condiciones necesarias para que dos cuantizaciones de Fock sean unitariamente equivalentes.

Sea $\ _i'$ una base ortonormal del nuevo espacio $\mathcal{H}'$. Los elementos de esta base pueden escribirse como una combinación lineal de los elementos $\ _i$ de $\mathcal{H}$ y $\ _i^*$ de $\mathcal{H}^*$, de forma tal que

$$\ _i' = \sum_j (\kappa_{ij}\ \ _j + \ \ _{ij}\ \ _j^*), \tag{1.3.16}$$

donde $\kappa : \mathcal{H}_0' \to \mathcal{H}_0$ y $\ \ : \mathcal{H}_0' \to \mathcal{H}_0^*$ ($\kappa_{ij}$ y $\ \ _{ij}$ son simplemente los elementos de $\kappa$ y $\ \ $ en las bases elegidas).

Las condiciones de ortonormalidad de ambas bases en sus respectivos productos internos exigen que se satisfagan las siguientes relaciones:

$$\kappa\kappa^\dagger - \ \ \ ^\dagger = \mathbb{1}, \quad \kappa^*\ \ ^\dagger - \ \ ^*\kappa^\dagger = 0. \tag{1.3.17}$$

Las aplicaciones lineales $\kappa$ y $\ \ $ se llaman transformaciones de Bogoliubov, y $\kappa_{ij}$ y $\ \ _{ij}$ son los coeficientes de Bogoliubov. Si expresamos las soluciones $\phi$ en ambas bases podemos deducir las relaciones entre las variables de creación y aniquilación asociadas a ambas. Formamos el siguiente "vector"(de dimensión infinita) con dichas variables:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix}.$$

La transformación canónica y lineal, $\mathbf{A}' = B\mathbf{A}$ vendrá caracterizada por la matriz

$$B = \begin{pmatrix} \kappa^* & -\ \ ^* \\ -\ \ & \kappa \end{pmatrix},$$

que es real y preserva la estructura simpléctica. La nueva estructura compleja se puede expresar entonces como $J' = BJB^{-1}$, que en forma matricial es

$$J' = \begin{pmatrix} \mathbb{1} + 2\ \ ^*\ \ ^{*\dagger} & 2\kappa^*\ \ ^{*\dagger} \\ -2\kappa\ \ ^{*\dagger} & -\mathbb{1} - 2\ \ \ ^\dagger \end{pmatrix}.$$

A continuación, construimos el estado de vacío, $|\ \ '\rangle = \widehat{B}|0\rangle \in \mathcal{H}'$, en el nuevo espacio de Hilbert. Este estado se caracteriza porque lo anulan todos los operadores de aniquilación $\hat{a}'$ correspondientes a la nueva estructura compleja, esto es, $\hat{a}_i'|\ \ '\rangle = 0\ \forall i$, donde, en forma matricial $\hat{a}' = \kappa^*\hat{a} - \ {}^*\hat{a}^\dagger$. No es difícil comprobar que la solución formal a esta condición viene dada (de nuevo usando notación matricial) por

$$|\ \ '\rangle = C\exp\left\{\frac{[\hat{a}^\dagger]^T(\kappa^*)^{-1}\ \ {}^*\hat{a}^\dagger}{2}\right\}|0\rangle, \tag{1.3.18}$$

donde $C$ es una constante.

Llegados a este punto, la condición para que la transformación $\widehat{B}$ sea unitaria es que se preserve la norma, es decir, debe cumplirse que $\langle\ \ '|\ \ '\rangle = \langle 0|0\rangle = 1$.

La condición de que el estado $|\ \ '\rangle$ tenga norma unidad implica, en particular, que su componente de dos partículas creadas por los operadores $\hat{a}^\dagger$ debe tener norma finita. Este requisito se reduce a exigir que la traza de $\gamma^\dagger\gamma$ sea finita, con $\gamma := (\kappa^*)^{-1}\ \ {}^*$. Por otra parte, de la primera relación en la ecuación (1.3.17) se deduce que la transformación $\kappa^*$ está acotada inferiormente, de forma que su inversa lo está por arriba. Como consecuencia, nuestro requisito sobre la traza de $\gamma^\dagger\gamma$ equivale a pedir que

$$tr(\ \ \ {}^\dagger) = \sum_{ij}|\ \ {}_{ij}|^2 < \infty. \tag{1.3.19}$$

Así pues, la transformación de Bogoliubov que relaciona ambas teorías debe ser tal que sea Hilbert-Schmidt [100]. Esto es equivalente a decir que $\bar{B} := JBJ + B$ sea Hilbert-Schmidt, con

$$\bar{B} = 2\begin{pmatrix} 0 & {}^* \\ & 0 \end{pmatrix},$$

o que $J' - J$ sea Hilbert-Schmidt.

Finalmente, conviene hacer notar que, en términos de los operadores de creación y aniquilación asociados a la estructura compleja $J'$, el número de partículas viene determinado por el operador $\hat{N}' = \sum_i \hat{a}'^\dagger_i \hat{a}'_i$. Es fácil ver que el valor esperado de este número de partículas en el vacío original $|0\rangle$ es precisamente la cantidad $tr(\ \ \ {}^\dagger)$. De esta forma, la condición que hemos deducido para discernir si dos estructuras complejas proporcionan cuantizaciones equivalentes o no resulta que puede interpretarse también como la condición de que el vacío de cualquiera de estas cuantizaciones contenga o no un número finito de las partículas correspondientes a la otra cuantización.

# Objetivos y estructura de la tesis

El objetivo general de esta tesis es facilitar un marco para la cuantización de un modelo cosmológico inhomogéneo realista y proporcionar las herramientas necesarias para la obtención de predicciones físicas fiables que puedan llegarse a contrastar con observaciones experimentales. Por su particular relevancia, tanto teórica como observacional, nos centraremos en el caso de un universo homogéneo e isótropo, de tipo FLRW, plano, con un campo escalar masivo sometido a un potencial, y con perturbaciones cosmológicas, tanto en la métrica como en el campo material.

Emplearemos los métodos de cuantización híbrida que se han desarrollado en los últimos años, combinando las técnicas de la gravedad de lazos para el sector homogéneo con una representación de Fock estándar para las inhomogeneidades. Además, consideraremos la generalización de este esquema a otros tipos de cuantizaciones para el espacio-tiempo de fondo. Como paso previo, estudiaremos la aplicabilidad a nuestro caso de los criterios de unicidad para eliminar las ambigüedades inherentes a la Teoría Cuántica de Campos en espacio-tiempos curvos. Estos criterios serán utilizados, posteriormente, a la hora de seleccionar las variables para las inhomogeneidades y la representación de Fock definida por la elección de la estructura compleja. Abordaremos, también, el tema de la invariancia gauge buscando una descripción covariante del sistema a partir de la cual seamos capaces de identificar los verdaderos grados de libertad físicos. Para ello, introduciremos las variables de Mukhanov-Sasaki. Estudiaremos posibles soluciones físicas, asumiendo cierto comportamiento para los diferentes grados de libertad, y explicaremos el proceso para deducir las ecuaciones efectivas de Mukhanov-Sasaki que incluyen correcciones originadas por los efectos cuánticos de la geometría. Estas ecuaciones gobiernan la propagación de las perturbaciones cosmológicas primordiales. Veremos que las correcciones que aparecen están recogidas en valores esperados de ciertos operadores de las variables homogéneas, calculados durante la evolución del estado FLRW en el tiempo interno del sistema, y su forma específica depende en última instancia del tipo de cuantización, así como de la prescripción adoptada en su implementación. Por último, presentaremos un procedimiento para calcular estos valores esperados y las herramientas para poder determinarlos en futuros trabajos numéricos con el fin de obtener el espectro de potencias de las perturbaciones y compararlo con el observado en el CMB.

Tras el presente capítulo de Introducción, en el que hemos motivado el interés de este trabajo y hemos dado un pequeño esbozo de las herramientas que vamos a usar, el cuerpo de la memoria está estructurado en dos partes, que comprenden un total de cinco capítulos.

- Parte I: Unicidad de la cuantización de Fock.

    - En el capítulo 2, consideraremos un campo de tipo Klein-Gordon con una masa dependiente del tiempo que se propaga sobre un espacio-tiempo estático con secciones espaciales planas y compactas, con la topología del tres-toro. En particular, estudiaremos la aplicabilidad del criterio para seleccionar una representación de Fock única (salvo transformaciones unitarias) que consiste en imponer: i) invariancia bajo las isometrías de la ecuación de movimiento, en este caso concreto las del tres-toro, y ii) la implementación unitaria de la dinámica. Además, demostraremos que este criterio también permite eliminar la ambigüedad en la elección del par canónico de las variables para la descripción del campo cuando se consideran transformaciones canónicas lineales, dependientes del tiempo, que incluyen el reescalado del campo y la redefinición de su momento.

    - Como extensión de estos resultados, en el capítulo 3, investigaremos la validez de nuestros criterios de unicidad a la hora de cuantizar campos escalares que obedecen ecuaciones de evolución de segundo orden más generales en fondos no estacionarios, con especial atención a espacio-tiempos cosmológicos. Concretamente, consideraremos casos en los que la dependencia espacial aparezca reflejada únicamente mediante un término proporcional al operador de Laplace-Beltrami. Y mostraremos que cualquier ecuación de este tipo puede llevarse a una forma de Klein-Gordon sobre un fondo estático, pero con una masa dependiente en el tiempo, mediante un reescalado del campo y una elección adecuada del tiempo. A continuación, ofreceremos una interpretación espacio-temporal de cada una de las ecuaciones de campo que estudiamos. Veremos que, en ciertos casos, puede llegar a aparecer una transición entre un espacio-tiempo de tipo euclídeo y otro lorentziano, fenómeno que ya se había sugerido en trabajos de otros autores. En estas situaciones, analizaremos el dominio de validez de nuestra teoría. Para completar el trabajo, estudiaremos, para una transición de estas características, la evolución de un estado de vacío dado por condiciones iniciales en la región euclídea.

- Parte II: Perturbaciones cosmológicas.

    - El capítulo 4 abordará la cuantización híbrida de un modelo perturbado consistente en un espacio-tiempo FLRW plano con secciones espaciales compactas en presencia de un campo escalar material. Presentaremos la descripción hamiltoniana clásica del sistema, truncando la acción a orden cuadrático en las inhomogeneidades. A continuación, eliminaremos la libertad de gauge asociada a las ligaduras lineales imponiendo condiciones de fijación apropiadas. Introduciremos una reparametrización para las inhomogeneidades en términos de las variables de Mukhanov-Sasaki. Luego, una transformación en el espacio de fases reducido completo, incluyendo los modos homogéneos, permitirá devolver la estructura simpléctica a la forma canónica. Obtendremos el denominado Hamiltoniano de Mukhanov-Sasaki. Tras la cuantización, empleando un ansatz de tipo Born-Oppenheimer para los estados cuánticos, seremos capaces de pasar de la ligadura hamiltoniana a una ecuación de evolución de Schrödinger para las perturbaciones, teniendo en cuenta ciertas aproximaciones adecuadas dentro de nuestro esquema de truncamiento. Estudiaremos también un orden de factores diferente para la cuantización de nuestro sistema de ligaduras simpléctico. De nuevo, después de usar el ansatz de Born-Oppenheimer, veremos que esa prescripción también da lugar a una ecuación cuántica para la propagación de las inhomogeneidades que es similar a la que se obtuvo en el formalismo de la métrica vestida [62, 63]. Concluiremos, comparando las ecuaciones efectivas para los invariantes de Mukhanov-Sasaki que se derivan de nuestro formalismo híbrido para los dos órdenes de factores alternativos.

- El tratamiento anterior se generalizará en el capítulo 5 en dos direcciones importantes. a) En lugar de reducir el sistema en el nivel clásico, llevaremos a cabo una transformación canónica del sector inhomogéneo completo que nos permita describir las inhomogeneidades en términos de las variables de Mukhanov-Sasaki, las ligaduras perturbativas lineales y cantidades canónicamente conjugadas a éstas. De esta manera, podremos imponer fácilmente las ligaduras perturbativas lineales en la teoría cuántica, sin necesidad de introducir ninguna fijación de gauge previa. b) No adoptaremos una representación específica para el sector homogéneo, en particular para la geometría FLRW. En este sentido, el formalismo que presentaremos aquí puede adaptarse a cualquier propuesta para la cosmología de FLRW (salvo mínimas condiciones sobre las propiedades del modo cero de la ligadura hamiltoniana que debemos tener en cuenta). Por tanto, los resultados físicos que se deduzcan dependerán de la cuantización concreta que se escoja, y su discusión tendrá que detallarse con posteridad. En la última sección, este formalismo se aplicará al caso concreto de LQC, a modo de ejemplo, y se derivarán las ecuaciones efectivas correspondientes para poder compararlas con las que obtuvimos en el capítulo previo.

- En el capítulo 6, sugeriremos un procedimiento para facilitar el tratamiento y evaluación numérica de los valores esperados que aparecen en las ecuaciones efectivas de Mukhanov-Sasaki, con la intención de conservar gran parte de las propiedades cuánticas del sistema en el cálculo. La mayor dificultad aparece en la integración de la dinámica de los estados FLRW en presencia de un potencial que varía en el tiempo. La estrategia que nosotros propondremos se basa en extraer de la evolución la parte de campo libre, correspondiente a un potencial nulo, y pasar a una imagen de interacción. Entonces, adaptando el sistema a una prescripción de LQC analítica, denominada sLQC [97], podremos integrar explícitamente la evolución generada por el operador geométrico de campo libre. Por otro lado, la interpretación del potencial dentro de un esquema perturbativo nos permitirá pasar a una nueva imagen de interacción, extrayendo las contribuciones dominantes del potencial escalar y el correspondiente operador de evolución. Particularizaremos el estudio al caso de un potencial cuadrático dado por un término de masa. Completaremos este tratamiento determinando la dinámica remanente del sistema generada, de nuevo, por un operador de interacción y discutiendo su contrapartida semiclásica.

Las conclusiones se presentarán en el capítulo 7, y recogerán los principales resultados obtenidos en el desarrollo de esta tesis.

Para descargar la exposición de esta memoria de excesivos detalles técnicos, relegaremos algunos cálculos especialmente extensos a tres apéndices. El apéndice A, recogerá las expresiones explícitas de las variables canónicas originales para el sector homogéneo del espacio de fases del sistema presentado en el capítulo 5, en términos del conjunto canónico de invariantes de gauge. Además, contendrá las nuevas expresiones para las componentes de la métrica espacio-temporal. En el apéndice B, investigaremos la autoconsistencia de una de las aproximaciones que se toma en la deducción de la ecuación de Schrödinger para las perturbaciones de Mukhanov-Sasaki. En particular, estudiaremos el término correspondiente a la segunda derivada de la función de onda de los modos de Mukhanov-Sasaki con respecto a la parte homogénea del campo escalar. En el último, el apéndice C, calcularemos la integral de camino de las contribuciones cuadráticas del potencial en la imagen de interacción discutida en el capítulo 6.

# Parte I

# Unicidad de la cuantización de Fock

# 2

# CRITERIOS DE UNICIDAD PARA LA CUANTIZACIÓN DE FOCK DE CAMPOS ESCALARES: EL CASO PLANO

## 2.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos la cuantización de Fock de un campo escalar en escenarios cosmológicos con secciones espaciales planas y compactas, isomorfas al tres-toro. En particular, nos centraremos en un campo escalar que satisface una ecuación de movimiento lineal, de tipo Klein-Gordon, con un término de masa dependiente del tiempo. Este estudio es relevante en cosmología cuando tratamos la propagación de campos en espacio-tiempos de FLRW y, aún más importante, en el análisis de perturbaciones cosmológicas en torno a este tipo de cosmologías. El interés de ceñirnos a la topología espacial del tres-toro surge de las observaciones experimentales actuales. Tal y como parecen indicar, el Universo es plano a escalas cosmológicas y, en este sentido, el tres-toro es la variedad espacial compacta en tres dimensiones que resulta natural analizar. Dentro del debate abierto sobre la finitud de nuestro Universo, cabe remarcar que la consideración de compacidad espacial no debe tener relevancia en nuestro análisis siempre y cuando se admita que la física a escalas suficientemente por encima de la del radio de Hubble no tiene implicaciones cosmológicas.

Al llevar a cabo el procedimiento de cuantización, existen ciertas ambigüedades ligadas al número infinito de grados de libertad del sistema. Una de ellas tiene que ver con la elección de las variables que se emplean para describir esos grados de libertad. Incluso respetando la linealidad, un reescalado del campo dependiente del tiempo afecta la dinámica del sistema, y por tanto influye en la viabilidad de su cuantización. Otro tipo de ambigüedad atañe a la selección de la representación de Fock para las relaciones de conmutación canónicas, o equivalentemente, a la elección del estado de vacío. Todavía más importante es el hecho de que las predicciones físicas que se derivan pueden depender fuertemente de las decisiones que se tomen en los pasos afectados por dichas ambigüedades. Por todo ello, garantizar la unicidad de este proceso de cuantización es esencial, y debe basarse en la confrontación de las predicciones con los datos experimentales, o bien apelar a una serie de criterios que, habitualmente, suelen tener en cuenta las simetrías del sistema o el comportamiento de los estados cuánticos.

En escenarios no estacionarios, la libertad en la elección del campo aparece de forma natural a través de transformaciones lineales dependientes del tiempo que nos proporcionan, en general, diferentes dinámicas del sistema, como hemos apuntado. Normalmente, las transformaciones que se consideran no son más que reescalados del campo a través de funciones del tiempo que nos permiten hacer una nueva descripción del sistema, a menudo más conveniente. Por ejemplo, en situaciones tales como campos que se propagan en espacio-tiempos cosmológicos de tipo FLRW, una elección adecuada del reescalado permite pasar a una ecuación de campo en la que se elimina la dependencia temporal del fondo, aunque a cambio surge un término de masa que varía en el tiempo. A diferencia de la mecánica cuántica, donde los sistemas tienen un número finito de grados de libertad, en Teoría Cuántica de Campos estas transformaciones lineales no siempre pueden implementarse de manera unitaria, lo cual afectará a las predicciones físicas de la teoría.

Por otro lado, una vez fijada la descripción de campo para el sistema, existe otra ambigüedad fundamental en la elección de la representación de las relaciones de conmutación canónicas. En Mecánica Cuántica, el teorema de Stone-Von Neumann nos garantiza la unicidad de la representación (del álgebra de Weyl) [96], salvo transformaciones unitarias, que no afectan al contenido físico de la teoría. Sin embargo, en Teoría Cuántica de Campos en espacio-tiempos curvos genéricos no existe ningún teorema análogo que nos proporcione tal grado de solidez en las predicciones físicas. En el caso de los campos de Klein-Gordon en el espacio-tiempo de Minkowski, las simetrías del espacio-tiempo marcan un criterio de selección única de nuestra representación. La invariancia de Poincaré –adaptada a la dinámica– define de manera unívoca, salvo equivalencia unitaria, una estructura compleja [100], que es el objeto matemático que guarda toda la información relevante para la cuantización, y que determina el estado de vacío. Para espacio-tiempos estacionarios, también se puede encontrar una única cuantización con ciertos criterios sobre la energía (véase, por ejemplo, [101, 102]), que permiten escoger una estructura compleja preferente. Sin embargo, en situaciones más generales, no existe un criterio de unicidad disponible, y uno debe afrontar el hecho de que existen muchas representaciones de Fock posibles no equivalentes.

No obstante, en los últimos años se ha demostrado que, en ciertas situaciones no estacionarias, todavía es posible seleccionar una única representación de Fock si se adopta el criterio de exigir la invariancia del estado de vacío bajo las simetrías espaciales de la ecuación de campo y que la dinámica del sistema cuántico sea unitaria. Para campos escalares, la representación de Fock así seleccionada es la que se asociaría de forma natural al caso de un campo libre y sin masa. Para que este criterio asegure la unicidad de la cuantización de Fock, es importante que las secciones espaciales del fondo en el que se propaga el campo sean compactas (de manera que no pueda surgir ninguna divergencia infrarroja al cuantizar el sistema). Además, se ha comprobado que estos criterios también seleccionan un único par canónico para el campo. El caso que se ha considerado en más detalle en los trabajos aparecidos en la literatura es el de secciones con la topología de una tres-esfera [103]. Sin embargo, como ya avanzamos en la Introducción, los primeros estudios se hicieron para los modelos de Gowdy de simetría reducida. Los resultados se extendieron al tratamiento de campos escalares propagándose sobre fondos con secciones espaciales isomorfas a esferas $d$-dimensionales (con $d \leq 3$) [103–105], e incluso a topologías compactas genéricas en tres o menos dimensiones [106]. La generalización de este criterio para eliminar la ambigüedad en el reescalado del campo a través de funciones del fondo dependientes del tiempo en el caso de secciones espaciales con una topología general compacta se puede encontrar en la referencia [107]. Los últimos trabajos han demostrado que dichos criterios también son válidos en el tratamiento de campos fermiónicos libres propagándose en cosmologías homogéneas e isótropas con la topología de la tres-esfera [108].

Aquí nos centraremos en el análisis de campos escalares lineales con una masa dependiente del tiempo que se propagan en escenarios más realistas, desde el punto de vista de la cosmología, manteniendo el carácter compacto de la topología espacial. Más allá del interés físico que tiene el estudio particular en la topología plana, merece la pena dedicarle especial atención a este caso por las peculiaridades que surgen debido a las características propias del grupo de simetrías del tres-toro, tal y como veremos a continuación.

## 2.2. Modelo de Klein-Gordon

Consideramos un campo escalar real $\phi$ que se propaga sobre un espacio-tiempo globalmente hiperbólico, estático, y cuya variedad espacial es un tres-toro $^3$, provisto con la métrica estándar $h_{ij}$. Como dominio del tiempo, asumimos un intervalo cualquiera de la recta real, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$. La topología del espacio-tiempo es, pues, la de $\mathbb{I} \times {}^3$. En cuanto al dominio temporal, no impondremos restricciones en su forma, ni siquiera si éste es acotado. Esta libertad es importante para la aplicación de nuestros resultados en situaciones tales que la descripción del campo sea efectiva, puesto que la validez de la geometría efectiva del espacio-tiempo podría estar condicionada sólo a un intervalo de tiempo dado. Vamos a considerar, incluso, que el dominio pueda ser la unión de distintos intervalos, en cuyo caso, la restricción de la demostración sobre uno de ellos sería suficiente para garantizar los resultados de unicidad.

A pesar de que el espacio-tiempo de fondo sea estático, estudiamos el caso en el que la masa del campo puede depender del tiempo, correspondiente a un potencial cuadrático de la forma $(\phi) = M(t)\phi^2/2$. Como consecuencia, el sistema deja de ser estacionario y el campo escalar cumple la ecuación de ondas lineal

$$\ddot{\phi} - \Delta\phi + M(t)\phi = 0, \tag{2.2.1}$$

que es una ecuación de tipo Klein-Gordon. Aquí, el punto hace referencia a la derivada temporal, $\Delta$ es el operador de Laplace-Beltrami correspondiente a la métrica del tres-toro y $M(t)$ es la función de masa dependiente del tiempo, que tomamos en principio como una función real arbitraria.

Debemos insistir en la importancia de esta ecuación. A menudo, aparece cuando tratamos campos escalares que se propagan en ciertos espacio-tiempos no estacionarios e introducimos una transformación canónica dependiente del tiempo para describirlos, de manera que el campo queda reescalado. En estos casos, el campo resultante puede ser interpretado como un campo escalar con una masa que cambia en el tiempo, sobre un fondo estático. Esto ocurre, por ejemplo, en el modelo de FLRW del Universo que tratamos en esta tesis, al multiplicar el campo original por el factor de escala de la métrica FLRW. Resulta evidente pues la relevancia que tendrá en nuestro estudio de perturbaciones escalares en el modelo con topologías espaciales compactas planas, esto es, en el caso de considerar un Universo con la topología espacial del tres-toro.

La ecuación de campo (2.2.1) es invariante bajo el grupo de isometrías del tres-toro, ya que el operador de Laplace-Beltrami se define a partir de la métrica estándar sobre $^3$. Por ello, vamos a considerar el producto de las tres copias del grupo de traslaciones en el círculo, una por cada dirección sobre el tres-toro:

$$_{\alpha_j} : \theta_j \to \theta_j + \alpha_j, \quad \forall \alpha_j \in S^1, \tag{2.2.2}$$

donde $\alpha_j$ es el ángulo de rotación en la dirección $j$ $(j = 1, 2, 3)$. Denominaremos $_{\vec{\alpha}}$, con $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, a la transformación total obtenida por la composición de las correspondientes rotaciones en cada una de las direcciones.

Hacemos notar que la representación de este grupo no es irreducible en cada espacio de autoestados del operador de Laplace-Beltrami, ya que no mezcla todos los estados posibles del sistema que tienen igual autovalor del laplaciano, como veremos luego en más detalle. Por ello, tendremos que hacer una descomposición de los autoespacios del operador de Laplace-Beltrami en sumas directas de representaciones irreducibles. A la hora de realizar la cuantización, no sólo tendremos que preocuparnos de que la dinámica del campo se implante de manera unitaria, sino también del grupo de simetrías. En concreto, impondremos que estas simetrías dejen invariantes todas las estructuras del sistema que toman parte en el proceso de cuantización.

Adoptemos, por ejemplo, la descripción del sistema correspondiente a su espacio de fases $\Gamma$. Recordamos que dicho espacio es el espacio de datos de Cauchy para un cierto tiempo $t_0 \in$ fijo arbitrario, $\{(\phi, \ _\phi)\} = \{(\phi_{|t_0}, \sqrt{h}\dot{\phi}_{|t_0})\}$, equipado con la estructura simpléctica (1.3.4) que nos proporciona los corchetes de Poisson (1.3.5), donde $\delta(\vec{\ })$ es la delta de Dirac sobre $^3$ y $\vec{\ }$ es el conjunto de coordenadas que parametriza la superficie del tres-toro.

Gracias a la periodicidad en las coordenadas espaciales $_i$, podemos descomponer el campo $\phi$ en modos de Fourier[2]:

$$\phi(t, \vec{\ }) = \frac{1}{(2\ )^{3/2}} \sum_{\vec{m}} \mathrm{q}_{\vec{m}}(t) e^{i(\vec{m}\cdot\vec{\ })}, \tag{2.2.3}$$

donde hemos introducido la notación $\vec{m} \cdot \vec{\ } = \sum_i m_i \ _i$, y $\vec{m}$ es una terna de enteros ($m_i \in \mathbb{Z}$, para $i = 1, 2, 3$). En lo sucesivo, descartamos el modo cero ($\vec{m} = 0$). Al tratarse de un único modo, su inclusión no afectará a las cuestiones relacionadas con la implementación unitaria de las simetrías y de la dinámica en teoría de campos, cuestiones que tienen que ver con la existencia de un número infinito de grados de libertad [100]. Además, este modo siempre se puede cuantizar por separado, incluyendo la posibilidad de emplear métodos no estándares en su descripción cuántica, como haremos más adelante utilizando una representación polimérica.

Esta descomposición compleja está perfectamente adaptada a las simetrías del tres-toro. No obstante, para evitar las complicaciones que podría acarrear el carácter real del campo, vamos a adoptar una descomposición alternativa en términos de las auto-funciones reales del operador de Laplace-Beltrami, es decir, en términos de los modos de Fourier correspondientes a las funciones seno y coseno

$$\phi(t, \vec{\ }) = \frac{1}{\ ^{3/2}} \sum_{\vec{n}}{}' [\ _{\vec{n}}(t)\cos(\vec{n}\cdot\vec{\ }) + x_{\vec{n}}(t)\,\mathrm{sen}(\vec{n}\cdot\vec{\ })]. \tag{2.2.4}$$

Aquí, hemos definido la terna $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, con $n_i \in \mathbb{Z}$, cambiando la notación de las etiquetas para los modos de Fourier y sus coeficientes asociados de $\vec{m}$ a $\vec{n}$, para facilitar la distinción entre las formulaciones compleja y real. De nuevo, ignoramos el modo $\vec{n} = 0$. Por

[2] Los coeficientes de Fourier $\ _{\vec{n}}(t)$ verifican que $\ ^*_{\vec{n}}(t) = \ _{-\vec{n}}(t)$, debido al carácter real del campo.

ello, y teniendo en cuenta que los modos que difieren en un signo global de $\vec{n}$ coinciden en realidad, el sumatorio anterior contiene únicamente las ternas de enteros $\vec{n}$ no-nulas cuyas primeras componentes diferentes de cero son positivas. Para aligerar la notación, esto lo hemos representado mediante una coma en el símbolo del sumatorio, en lugar de hacerlo explícito.

De acuerdo con la ecuación de campo (2.2.1), podemos deducir que los modos de la descomposición de Fourier obedecen ecuaciones de movimiento completamente desacopladas. En particular, todos los modos con el mismo autovalor del operador de Laplace-Beltrami, $-\omega_n^2 := -\sum_i n_i^2$, satisfacen la misma ecuación de movimiento:

$$\ddot{\ }_{\vec{n}} + [\omega_n^2 + M(t)]\ _{\vec{n}} = 0, \tag{2.2.5}$$

y el análogo para los modos seno, $x_{\vec{n}}$. El índice entero $n = 1, 2, 3, \dots$ ordena los valores de $\omega_n^2$ en sentido creciente, esto es, $\omega_n < \omega_{n'}$ si $n < n'$. Además, es evidente que $\omega_n^2 \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Rápidamente, puede verse que, en general, existen diferentes ternas de enteros $(n_1, n_2, n_3)$ tales que la suma de sus cuadrados es igual a un valor de $\omega_n^2$ fijo. Por eso, resulta conveniente definir un subconjunto $Q_n$ que incluya todos los modos con la misma frecuencia. La dimensión de $Q_n$ es diferente para cada valor de $n$ fijo. Este hecho introduce una degeneración accidental $g_n$ en el sistema, que es igual a la dimensión de cada subespacio $Q_n$. En resumen, tenemos infinitos autoespacios del operador de Laplace-Beltrami, cada uno de ellos con una ecuación de movimiento única para todos los modos que contiene. A su vez, estos autoespacios serán suma de un cierto número de representaciones irreducibles del grupo de simetrías, cada una asociada a una terna $(n_1, n_2, n_3)$ diferente. Estas representaciones irreducibles deberán estudiarse por separado y su número en cada autoespacio $Q_n$ vendrá dado por la degeneración $g_n$.

Análogamente, descomponemos el momento del campo ${}_{\phi}$ siguiendo los mismos pasos que hemos explicado para la variable de configuración. De este modo, los coeficientes para las contribuciones coseno y seno de la expansión en modos reales del momento, que llamaremos $p_{\vec{n}}$ y $y_{\vec{n}}$, respectivamente, satisfacen las ecuaciones dinámicas $p_{\vec{n}} = \dot{\ }_{\vec{n}}$, y $y_{\vec{n}} = \dot{x}_{\vec{n}}$. Los corchetes de Poisson no nulos correspondientes son $\{\ _{\vec{n}}, p_{\vec{n}'}\} = \{x_{\vec{n}}, y_{\vec{n}'}\} = \delta_{\vec{n}\vec{n}'}$.

La forma más natural de obtener una representación unitaria del grupo de simetrías dentro de la teoría cuántica es mediante la definición de una representación de las relaciones de conmutación canónicas a través de un estado (del álgebra de Weyl) que sea invariante bajo las transformaciones en cuestión. En realidad, de esta forma no sólo se asegura la unitariedad de las transformaciones de simetría, sino que también se garantiza que todas las estructuras cuánticas resulten invariantes bajo su acción. Una representación que conocemos bien es la asociada al campo libre sin masa, puesto que la correspondiente estructura compleja definida sobre el espacio de fases, $J_0$, queda determinada exclusivamente por la métrica y el laplaciano:

$$J_0 \begin{pmatrix} \phi \\ \ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(-h\Delta)^{-1/2} \\ (-h\Delta)^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \ \end{pmatrix}. \tag{2.2.6}$$

Obviamente, la estructura compleja es invariante bajo la acción del grupo de simetrías del sistema (pues lo son el laplaciano y el determinante de la métrica inducida), lo cual nos conduce a una implementación unitaria natural. Para discutir la cuantización de Fock y la unitariedad de la dinámica será conveniente reemplazar las variables canónicas $(\ _{\vec{n}}, p_{\vec{n}}; x_{\vec{n}}, y_{\vec{n}})$ por las variables de aniquilación

$$a_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}}(\omega_n \ _{\vec{n}} + ip_{\vec{n}}), \qquad \tilde{a}_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}}(\omega_n x_{\vec{n}} + iy_{\vec{n}}), \tag{2.2.7}$$

y las de creación que se obtienen como los complejos conjugados $a^*_{\vec{n}}$ y $\tilde{a}^*_{\vec{n}}$. A partir de ahora, estas variables complejas serán las coordenadas de nuestro espacio de fases canónico, excepto para el caso $\omega_n^2 = 0$, donde no es válida la definición que hemos dado (sin embargo ya hemos dicho que íbamos a ignorar el modo cero). En función de estas nuevas variables, la estructura compleja $J_0$ resulta ser puramente diagonal, y queda definida por

$$\begin{aligned} J_0(a_{\vec{n}}) &= ia_{\vec{n}}, & J_0(\tilde{a}_{\vec{n}}) &= i\tilde{a}_{\vec{n}}, \\ J_0(a^*_{\vec{n}}) &= -ia^*_{\vec{n}}, & J_0(\tilde{a}^*_{\vec{n}}) &= -i\tilde{a}^*_{\vec{n}}. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Como consecuencia de que todos los modos con la misma frecuencia $\omega_n$ tienen la misma dinámica, la evolución temporal de las variables canónicas $(a_{\vec{n}}, a^*_{\vec{n}})$ desde un tiempo fijo $t_0$ hasta un tiempo arbitrario $t$ (dada por una transformación simpléctica lineal) es diagonal en bloques $2 \times 2$, de manera que

$$\begin{pmatrix} a_{\vec{n}}(t) \\ a^*_{\vec{n}}(t) \end{pmatrix} = U_n \begin{pmatrix} a_{\vec{n}}(t_0) \\ a^*_{\vec{n}}(t_0) \end{pmatrix}, \quad U_n = \begin{pmatrix} \alpha_n(t,t_0) & \beta_n(t,t_0) \\ \beta^*_n(t,t_0) & \alpha^*_n(t,t_0) \end{pmatrix}, \tag{2.2.9}$$

y análogamente para el par $(\tilde{a}_{\vec{n}}, \tilde{a}^*_{\vec{n}})$. Los coeficientes $\alpha_n(t,t_0)$ y $\beta_n(t,t_0)$ son los coeficientes de Bogoliubov y caracterizan completamente la evolución clásica del sistema y, puesto que $U_n(t,t_0)$ ha de ser un simplectomorfismo, se cumple que

$$|\alpha_n(t,t_0)|^2 - |\beta_n(t,t_0)|^2 = 1 \quad \forall n, \tag{2.2.10}$$

para cada valor de $t \in$ .

## 2.3. Unicidad de la cuantización

A continuación, analizaremos los criterios de unicidad que, como ya enunciamos, consisten en imponer: i) invariancia bajo el grupo de simetrías de la ecuación de movimiento, y ii) que la dinámica sea unitaria. En particular, demostraremos que estas dos condiciones son suficientes para seleccionar una única clase de representaciones de Fock para las relaciones de conmutación canónicas. Los pasos a seguir son los siguientes. Primero, comprobaremos que la dinámica del campo se implementa de manera unitaria en la representación cuántica definida por $J_0$, incluso cuando el campo posee una masa que varía en el tiempo. Seguidamente, caracterizaremos la estructura compleja más general que sea invariante bajo el grupo de simetrías formado por las transformaciones $\vec{\ }_{\vec{\alpha}}$. Veremos que éstas están relacionadas a través de una familia muy específica de transformaciones simplécticas. Por último, utilizando esta caracterización y exigiendo que la dinámica admite una implementación unitaria, probaremos la unicidad de esta estructura compleja invariante (salvo equivalencias unitarias).

### 2.3.1. Unitariadedad de la dinámica

La primera pregunta que queremos responder aquí es si la evolución temporal de los operadores de creación y aniquilación, dada por la ecuación (2.2.9), corresponde a una transformación unitaria en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ construido a partir de la representación determinada por $J_0$. En la sección 1.3.4 vimos que esto es posible si y sólo si $U_n(t,t_0) + J_0 U_n(t,t_0) J_0$ es un operador Hilbert-Schmidt. Esta condición se traduce en una condición de sumabilidad sobre los coeficientes $\beta_n(t,t_0)$, a saber

$$\sum_n g_n |\beta_n(t,t_0)|^2 < \infty \quad \forall t \in \ , \tag{2.3.1}$$

dado un tiempo $t_0$ de referencia. Recordemos que $g_n$ es el factor de degeneración del subespacio $Q_n$ y que será diferente para cada valor de $n$. Este coeficiente cuenta el número de grados de libertad que tienen la misma dinámica. Como ya apuntamos, la condición reseñada físicamente nos asegura que, durante la evolución del sistema, el estado de vacío siempre tiene un número finito de partículas.

Como consecuencia de la condición de unitariedad (2.3.1), debemos centrarnos en el estudio del comportamiento de los coeficientes $\beta_n$ en el límite $\omega_n^2 \to \infty$ o, lo que sería lo mismo, en el análisis asintótico de las soluciones de la ecuación de movimiento del campo (2.2.5). El análisis asintótico de los coeficientes de Bogoliubov para un campo de Klein-Gordon con una masa dependiente del tiempo en un espacio-tiempo estacionario ya se hizo en la referencia [103] y los resultados se pueden aplicar directamente para el caso de secciones compactas espaciales isomorfas al tres-toro. En dicho artículo se concluye que

$$\alpha_n(t,t_0) = e^{-i\omega_n(t-t_0)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega_n}\right), \qquad \beta_n(t,t_0) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega_n^2}\right). \tag{2.3.2}$$

El símbolo $\mathcal{O}$ indica el orden asintótico. La única hipótesis sobre el campo que se emplea para deducir este comportamiento (aunque no es necesario para su validez) es que la función de masa $M(t)$ posee una primera derivada que es integrable en todos los subintervalos del dominio . Es inmediato ver, pues, que la condición de unitariedad es equivalente a la sumabilidad de la secuencia formada por $g_n/\omega_n^4$. Para demostrar que esto se cumple, es necesario analizar cómo cambia la degenaración $g_n$ en función de $n$ cuando nos acercamos al límite de valores muy grandes, $n \to \infty$. Si bien es verdad que, debido a la degeneración accidental que explicamos anteriormente, la dependencia exacta no se puede dar explícitamente, para nuestra discusión únicamente necesitamos dar el comportamiento asintótico, lo cual es relativamente fácil, como veremos a continuación.

Los valores $\omega_n^2$ pueden interpretarse como la norma del vector $\vec{n}$ asociado a la terna que usamos para etiquetar los modos. En principio, $\vec{n}$ está restringido de forma que su primera componente no-nula sea positiva. Sin embargo, dado que existen dos modos por cada valor de $\vec{n}$, los modos seno y coseno, podemos asignar cada uno de estos pares a las parejas de vectores $(\vec{n}, -\vec{n})$. De esta forma, podemos hacer una correspondencia entre los modos y los vectores cuyas componentes son no-nulas y enteras. Ahora, vamos a usar que $1/\omega_n^4$ es positivo y decrece al crecer $n$, y además que el conjunto de autovalores $\omega_n$ del operador de Laplace-Beltrami contiene al subconjunto de los enteros, $\{N\}$. Debido a ello, no es difícil convencerse de que $\sum_n (g_n/\omega_n^4) < \sum_N D_N/N^4$, donde $D_N$ es el número de autovalores en el intervalo real $(N, N+1]$, contando su degeneración. Haciendo un análisis geométrico paralelo, esto equivale a contar el número de vértices dentro de una red cúbica de paso unidad cuyas coordenadas son ternas de enteros que estén situados a una distancia del origen comprendida en dicho intervalo. Por tanto, el número $D_N$ crece con $N$ como $N^2$. Teniendo en cuenta que la suma $\sum_N 1/N^2$ converge, concluimos que la suma estudiada $g_n/\omega_n^4$ es finita, de manera que, efectivamente, se cumple la condición de unitariedad (2.3.1).

Recapitulando, hemos visto que existe una representación de Fock, construida a partir de una estructura compleja invariante bajo el grupo de simetrías del sistema, que permite implementar la dinámica de forma unitaria para el caso de un campo escalar con una masa dependiente del tiempo. Sin embargo, sabemos que en Teoría Cuántica de Campos existen infinitas formas posibles de definir la estructura compleja que, en principio, no son equivalentes entre sí. Llegados a este punto, nos preguntamos si sería posible encontrar una representación distinta, no equivalente, pero con las mismas propiedades. Nosotros vamos a demostrar que, a pesar de que existan infinitas posibles representaciones de Fock invariantes bajo el grupo de simetrías del sistema, en realidad, la condición de que la dinámica sea implementada en la teoría cuántica de manera unitaria selecciona una única clase de representaciones unitariamente equivalentes entre sí, es decir, las únicas representaciones con estas características son todas unitariamente equivalentes a la representación construida con la estructura compleja $J_0$, asociada de forma natural al caso sin masa.

### 2.3.2. Caracterización de las estructuras complejas invariantes

En este apartado, vamos a determinar exclusivamente aquellas estructuras complejas $J$ que son invariantes bajo la acción del grupo de simetrías en el tres-toro (2.2.2). Esta propiedad es la que caracterizará por completo nuestras estructuras complejas *invariantes*. El procedimiento que vamos a seguir difiere respecto al que se ha presentado en otros trabajos con topologías espaciales compactas, puesto que hemos tenido que adaptar el análisis a las particularidades de la topología del tres-toro. En primer lugar, el grupo de isometrías del tres-toro es abeliano, de manera que sus representaciones irreducibles son todas 1-dimensionales sobre el espacio de vectores complejos. Además, dado que el campo escalar es real, estas representaciones deben combinarse adecuadamente. Por otro lado, tal y como ya hemos explicado, debido a la degeneración accidental, los autoespacios del operador de Laplace-Beltrami no proporcionan representaciones irreducibles del grupo de isometrías, aun cuando el operador conmuta con las isometrías porque se ha construido a partir de la métrica. De nuevo, esta situación vuelve a aparecer como una peculiaridad del tres-toro en comparación con el resto de trabajos que se encuentran en la literatura, por ejemplo, para las $d-$esferas. Por tanto, es una razón adicional por la que creemos interesante realizar el análisis detallado para esta tesis.

La acción de las simetrías del tres-toro $_{\vec{\alpha}}$ sobre los modos reales se puede deducir fácilmente a partir de la transformación que sufre el campo [véase la ecuación (2.2.4)]. Así uno llega a

$$\left( \begin{array}{c} {}'_{\vec{n}} \\ x'_{\vec{n}} \end{array} \right) = R_{\vec{n}}(\vec{\alpha}) \left( \begin{array}{c} {}_{\vec{n}} \\ x_{\vec{n}} \end{array} \right), \quad R_{\vec{n}}(\vec{\alpha}) = \left( \begin{array}{cc} \cos(\vec{n}\cdot\vec{\alpha}) & -\operatorname{sen}(\vec{n}\cdot\vec{\alpha}) \\ \operatorname{sen}(\vec{n}\cdot\vec{\alpha}) & \cos(\vec{n}\cdot\vec{\alpha}) \end{array} \right). \tag{2.3.3}$$

De manera similar podemos obtener las ecuaciones para los modos del momento del campo $_{\phi}$: $(p_{\vec{n}}, y_{\vec{n}})$. Es apropiado señalar que estas transformaciones mezclan los modos por pares, combinando únicamente los modos seno y coseno con la misma etiqueta $\vec{n}$, que al pertenecer al mismo autoespacio de Laplace-Beltrami, tienen la misma dinámica. Sin embargo, como la acción del grupo no mezcla todos los modos de un mismo autoespacio, la caracterización de las estructuras complejas invariantes se complica, llegando a una situación similar a la que se encontró para la topología $S^1$ [75, 76, 104], pero en dimensiones superiores. Además, hacemos notar que la acción sobre cada uno de los pares es diferente.

En otras palabras, en la sección 2.2 vimos cómo descomponer el espacio de fases $\Gamma$ en una suma directa de subespacios $\Gamma_n$ correspondientes a cada uno de los autoespacios del operador de Laplace-Beltrami, de forma que $\Gamma_n := \mathcal{Q}_n \oplus \mathcal{P}_n$. Esta descomposición se mantiene en la evolución, debido al desacoplo de la ecuación de movimiento que gobierna la dinámica del campo (2.2.5). Pero, a su vez, cada uno de estos subespacios se descompone en una suma directa de las correspondientes a las representaciones irreducibles del grupo de simetrías, $\Gamma_{\vec{n}} := \mathcal{Q}_{\vec{n}} \oplus \mathcal{P}_{\vec{n}}$, caracterizadas totalmente por cada una de las posibles ternas $\vec{n}$. De manera inmediata, pues, aplicando el lema de Schur, llegamos a la conclusión de que cualquier estructura compleja $J : \Gamma \to \Gamma$ invariante bajo el grupo de simetrías puede ser diagonalizada por bloques con respecto a esta descomposición. Esto es:

$$J = \bigoplus_{\vec{n}}{}' J_{\vec{n}}, \tag{2.3.4}$$

donde $J_{\vec{n}} : \Gamma_{\vec{n}} \to \Gamma_{\vec{n}}$ son estructuras complejas invariantes representadas por bloques $4 \times 4$. Adoptemos, por ejemplo, la base de variables formada por los modos reales $( {}_{\vec{n}}, x_{\vec{n}}; p_{\vec{n}}, y_{\vec{n}})$ para cada subespacio $\Gamma_{\vec{n}}$. Entonces, a cada $J_{\vec{n}}$ le corresponde una matriz caracterizada por cuatro bloques $2 \times 2$: $J_{\vec{n}}^{\mathcal{QQ}} = A_{\vec{n}}$, $J_{\vec{n}}^{\mathcal{QP}} = B_{\vec{n}}$, $J_{\vec{n}}^{\mathcal{PQ}} = C_{\vec{n}}$ y $J_{\vec{n}}^{\mathcal{PP}} = D_{\vec{n}}$, que representan todas las posibles conexiones entre los subespacios $\mathcal{Q}_{\vec{n}}$ y $\mathcal{P}_{\vec{n}}$.

Resumiendo, si $J$ es una estructura compleja invariante, únicamente mezcla las componentes de los subespacios $\mathcal{Q}_{\vec{n}}$ y $\mathcal{P}_{\vec{n}}$ entre sí para cada valor de $\vec{n}$, y cada una de las estructuras complejas $J_{\vec{n}}$ resultantes de la descomposición (2.3.4) se puede escribir de forma matricial como

$$J_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} A_{\vec{n}} & B_{\vec{n}} \\ C_{\vec{n}} & D_{\vec{n}} \end{pmatrix}. \tag{2.3.5}$$

Los elementos de estos bloques son números reales, puesto que las componentes de la estructura compleja lo son en la base de variables reales elegida.

A partir de la condición de invariancia que exigimos para la estructura compleja $J$ (esto es, ${}_{\vec{\alpha}}^{-1} J \ {}_{\vec{\alpha}} = J, \forall \ {}_{\vec{\alpha}}$), concluimos que cada uno de estos bloques $2 \times 2$ debe conmutar con todas las matrices de rotación $R_{\vec{n}}(\vec{\alpha})$ [véase la ecuación (2.3.3)], de lo que se deduce que cada bloque debe tener una parte diagonal proporcional a la identidad y una parte no-diagonal antisimétrica. Esto es, con una notación matricial genérica $M_{\vec{n}}$ para $A_{\vec{n}}$, $B_{\vec{n}}$, $C_{\vec{n}}$ y $D_{\vec{n}}$, tenemos que

$$M_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} M_{\vec{n}}^{(1)} & M_{\vec{n}}^{(2)} \\ -M_{\vec{n}}^{(2)} & M_{\vec{n}}^{(1)} \end{pmatrix}. \tag{2.3.6}$$

Todavía nos queda imponer las tres condiciones que definen una estructura compleja, para así ajustar la relación entre los elementos de estas matrices. En concreto, debemos asegurarnos de que las estructuras complejas sean compatibles con la estructura simpléctica, de manera que la composición $\Omega(J\cdot,\cdot)$ proporcione una aplicación bilineal definida positiva sobre el espacio de fases. En términos de los bloques $J_{\vec{n}}$, esta condición se traduce en que $J_{\vec{n}}\ \Omega_{\vec{n}}$ debe ser una matriz simétrica definida positiva, donde $J_{\vec{n}}$ es la matriz transpuesta de $J_{\vec{n}}$ y los bloques de la estructura simpléctica son

$$\Omega_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} & -\mathbf{1}_{2\times 2} \\ \mathbf{1}_{2\times 2} & \mathbf{0}_{2\times 2} \end{pmatrix}. \tag{2.3.7}$$

Aquí, $\mathbf{0}_{2\times 2}$ es la matriz cero y $\mathbf{1}_{2\times 2}$ es la matriz identidad en dos dimensiones. Junto con la condición de invariancia discutida, concluimos de lo anterior que los bloques $J_{\vec{n}}$ deben tener la forma

$$J_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} A_{\vec{n}} & B_{\vec{n}} \\ C_{\vec{n}} & -A_{\vec{n}} \end{pmatrix}, \tag{2.3.8}$$

donde $B_{\vec{n}}$ y $C_{\vec{n}}$ serán proporcionales a la identidad, con una constante de proporcionalidad no-positiva y no-negativa, respectivamente. Esto es,

$$B^{(2)}_{\vec{n}} = C^{(2)}_{\vec{n}} = 0, \qquad B^{(1)}_{\vec{n}} \leq 0, \qquad C^{(1)}_{\vec{n}} \geq 0. \tag{2.3.9}$$

El resto de condiciones que definen a las estructuras complejas son: i) su cuadrado es menos la identidad, $J^2 = -\mathbf{1}$, y ii) deja invariante la estructura simpléctica, es decir, $\Omega(J\cdot, J\cdot) = \Omega(\cdot,\cdot)$. Esto se traduce en las siguientes dos condiciones sobre los bloques $J_{\vec{n}}$:

$$J^2_{\vec{n}} = -\mathbf{1}_{4\times 4}, \qquad J_{\vec{n}}\ \Omega_{\vec{n}} J_{\vec{n}} = \Omega_{\vec{n}}. \tag{2.3.10}$$

A partir de estas condiciones, deducimos las siguientes ecuaciones para los elementos de matriz:

$$-\left[A^{(1)}_{\vec{n}}\right]^2 + \left[A^{(2)}_{\vec{n}}\right]^2 - B^{(1)}_{\vec{n}} C^{(1)}_{\vec{n}} = 1, \qquad A^{(1)}_{\vec{n}} A^{(2)}_{\vec{n}} = 0, \tag{2.3.11}$$

y

$$\left[A^{(1)}_{\vec{n}}\right]^2 + \left[A^{(2)}_{\vec{n}}\right]^2 + B^{(1)}_{\vec{n}} C^{(1)}_{\vec{n}} = -1, \tag{2.3.12}$$

$$A^{(2)}_{\vec{n}} B^{(1)}_{\vec{n}} = 0, \qquad A^{(2)}_{\vec{n}} C^{(1)}_{\vec{n}} = 0. \tag{2.3.13}$$

Sumando la primera igualdad de la ecuación (2.3.11) con la (2.3.12), uno llega a que el elemento de matriz $A^{(2)}_{\vec{n}}$ es cero. Por tanto, la formas más general para cada uno de los bloques $J_{\vec{n}}$ de una estructura compleja invariante y compatible con la forma simpléctica es

$$J_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} A^{(1)}_{\vec{n}} \mathbf{1}_{2\times 2} & B^{(1)}_{\vec{n}} \mathbf{1}_{2\times 2} \\ C^{(1)}_{\vec{n}} \mathbf{1}_{2\times 2} & -A^{(1)}_{\vec{n}} \mathbf{1}_{2\times 2} \end{pmatrix}, \tag{2.3.14}$$

donde

$$B^{(1)}_{\vec{n}} < 0, \qquad C^{(1)}_{\vec{n}} > 0, \qquad A^{(1)}_{\vec{n}} = \pm\sqrt{-1 - B^{(1)}_{\vec{n}} C^{(1)}_{\vec{n}}}. \tag{2.3.15}$$

Hacemos notar que $B^{(1)}_{\vec{n}} C^{(1)}_{\vec{n}} \leq -1$, ya que $A^{(1)}_{\vec{n}}$ es un número real.

Para continuar, es conveniente pasar de la base de modos reales a las variables complejas $(a_{\vec{n}}, a^*_{\vec{n}}; \tilde{a}_{\vec{n}}, \tilde{a}^*_{\vec{n}})$ definidas en (2.2.7) para la estructura compleja $J_0$, asociada al caso de campo sin masa. Uno puede comprobar que, en esta base, los bloques $J_{\vec{n}}$ de cualquier estructura compleja invariante deben ser diagonales por bloques, con bloques $2 \times 2$ que coinciden por pares. Explícitamente,

$$J_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{\vec{n}} & 2\times2 \\ 2\times2 & \mathcal{J}_{\vec{n}} \end{pmatrix}, \tag{2.3.16}$$

con

$$\mathcal{J}_{\vec{n}} = i \begin{pmatrix} -B^{(1)}_{\vec{n}} + C^{(1)}_{\vec{n}} \omega_n^2 & -B^{(1)}_{\vec{n}} - C^{(1)}_{\vec{n}} \omega_n^2 + i A^{(1)}_{\vec{n}} \omega_n \\ B^{(1)}_{\vec{n}} + C^{(1)}_{\vec{n}} \omega_n^2 + i A^{(1)}_{\vec{n}} \omega_n & B^{(1)}_{\vec{n}} - C^{(1)}_{\vec{n}} \omega_n^2 \end{pmatrix}. \tag{2.3.17}$$

Puede verse que cada estructura $J$ invariante, expresada en esta nueva base de variables en el espacio de fases, se puede relacionar con $J_0$ mediante una transformación simpléctica $K$ tal que $J = K J_0 K^{-1}$. Puesto que $J_0$ es diagonal con bloques de la forma $(J_0)_{\vec{n}} = \mathrm{diag}\{i, -i, i, -i\}$ [véase la ecuación (2.2.8)], la transformación $K$ toma una forma diagonal por bloques, con matrices $4 \times 4$, a saber,

$$K_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{\vec{n}} & 2\times2 \\ 2\times2 & \mathcal{K}_{\vec{n}} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{K}_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} \kappa_{\vec{n}} & {}_{\vec{n}} \\ {}^*_{\vec{n}} & \kappa^*_{\vec{n}} \end{pmatrix}. \tag{2.3.18}$$

Como $K$ es un simplectomorfismo, $\kappa_{\vec{n}}$ y ${}_{\vec{n}}$ son números complejos que desempeñan el papel de coeficientes de Bogoliubov para la transformación $K$ y, por tanto, satisfacen la condición

$$|\kappa_{\vec{n}}|^2 - |\ {}_{\vec{n}}|^2 = 1 \qquad \forall \vec{n}. \tag{2.3.19}$$

Finalmente, la relación entre éstos y los elementos de matriz $A^{(1)}_{\vec{n}}$, $B^{(1)}_{\vec{n}}$ y $C^{(1)}_{\vec{n}}$ viene dada por

$$2|\kappa_{\vec{n}}|^2 = 1 - B^{(1)}_{\vec{n}} + C^{(1)}_{\vec{n}} \omega_n^2, \tag{2.3.20}$$

$$2\kappa_{\vec{n}}\ {}_{\vec{n}} = B^{(1)}_{\vec{n}} + C^{(1)}_{\vec{n}} \omega_n^2 - i A^{(1)}_{\vec{n}} \omega_n. \tag{2.3.21}$$

Es importante subrayar que la fase de $\kappa_{\vec{n}}$ se puede escoger libremente. Por ejemplo, uno podría elegirla de manera que dicho coeficiente de Bogoliubov fuese no-negativo, sin que esto afectara al resto de nuestras consideraciones.

El resultado obtenido se puede resumir diciendo que cualquier estructura compleja $J$ invariante bajo el grupo de simetrías sobre el tres-toro está relacionada con $J_0$ mediante una transformación simpléctica $K$ que es diagonal por bloques $2 \times 2$, de acuerdo con la descomposición (2.3.4). Recordamos que $J_0$ es la estructura compleja definida en la sección 2.2 y que, si bien es la elección natural en el caso de un campo sin masa, como ya demostramos, nos permite implementar la dinámica del sistema de manera unitaria incluso cuando el campo tiene una masa dependiente del tiempo.

### 2.3.3. Unicidad de las representaciones invariantes

Para concluir esta sección y comprobar que efectivamente nuestro criterio de unicidad selecciona una única representación de Fock, todavía tenemos que demostrar que la implementación unitaria de la dinámica limita las estructuras complejas invariantes a una única familia de estructuras unitariamente equivalentes. Para ello, haremos uso del hecho de que todas las posibles estructuras complejas invariantes $J$ se pueden relacionar con $J_0$ a través de una transformación simpléctica $K$ que puede entenderse como un simple cambio de las variables de creación y aniquilación.

De forma general, una transformación simpléctica  , admite una implementación unitaria en la cuantización determinada por la estructura compleja $J = KJ_0K^{-1}$ si y sólo si la transformación $K^{-1}\;\; K$ se puede implementar de manera unitaria en la teoría cuántica construida con $J_0$. Aplicando este resultado a la transformación proporcionada por las matrices de evolución $U_n(t, t_0)$, definidas en (2.2.9), deducimos que la dinámica podrá ser implementada unitariamente en la cuantización de Fock determinada por una estructura compleja invariante $J$ si y sólo si la representación fijada por $J_0$ admite una implementación unitaria de la transformación cuyos bloques matriciales son $K_{\vec{n}}^{-1}U_n(t, t_0)K_{\vec{n}}$. Estas matrices pueden interpretarse como las nuevas matrices de evolución cuando se cambia de operadores de creación y aniquilación, pasando de los asociados con $J_0$ a los de $J$. Además, dichas matrices pueden expresarse en función de unos nuevos coeficientes de Bogoliubov, $\alpha^J_{\vec{n}}$ y $\beta^J_{\vec{n}}$. Realizando un sencillo cálculo, se deduce que la expresión para los nuevos coeficientes $\beta^J_{\vec{n}}$ en función de los originales es

$$\beta^J_{\vec{n}}(t, t_0) = (\kappa^*_{\vec{n}})^2\beta_n(t, t_0) - (\;\;{}_{\vec{n}})^2\beta^*_n(t, t_0) + 2i\kappa^*_{\vec{n}}\;\;{}_{\vec{n}}\mathfrak{Im}[\alpha_n(t, t_0)], \tag{2.3.22}$$

donde $\mathfrak{Im}[\cdot]$ indica la parte imaginaria. Es importante resaltar que estos coeficientes dependen no sólo de $n$, la etiqueta del autoespacio del operador de Laplace-Beltrami, sino también de la terna $\vec{n}$, es decir, de la representación real e irreducible del grupo de simetría del tres-toro.

De nuevo, la condición de unitariedad de la dinámica en la nueva representación de Fock no es más que la sumabilidad de las secuencias dadas por el módulo al cuadrado de $\beta^J_{\vec{n}}(t, t_0)$ al tener en cuenta, pues, todas las posibles ternas $\vec{n}$. Esta condición es análoga al requisito (2.3.1) si se tiene en cuenta que ahora el factor de degeneración es siempre igual a uno.

Por otro lado, la representación de Fock seleccionada por $J$ es unitariamente equivalente a la obtenida con $J_0$ si el simplectomorfismo con bloques $\mathcal{K}_{\vec{n}}$ resulta ser una transformación unitaria en la cuantización que determina $J_0$. Y la condición para que esto último suceda es simplemente que

$$\sum_{\vec{n}} |\ _{\vec{n}}|^2 < \infty. \tag{2.3.23}$$

Así pues, para concluir nuestra demostración, sólo tenemos que comprobar que, si las secuencias $\{\beta^J_{\vec{n}}(t,t_0)\}$ son de cuadrado sumable para todo tiempo $t \in\ $ , entonces también lo es la secuencia $\{\ _{\vec{n}}\}$.

Como $|\kappa_{\vec{n}}|^2 - |\ _{\vec{n}}|^2 = 1$, tenemos que $|\kappa_{\vec{n}}| > 1$. Por tanto, si partimos del hecho de que las secuencias $\{\beta^J_{\vec{n}}(t,t_0)\}$ son de cuadrado sumable (para todo tiempo), también lo serán las secuencias formadas por

$$\frac{\beta^J_{\vec{n}}(t,t_0)}{(\kappa^*_{\vec{n}})^2} = \beta_n(t,t_0) - \left(\frac{\ _{\vec{n}}}{\kappa^*_{\vec{n}}}\right)^2 \beta^*_n(t,t_0) + 2i\left(\frac{\ _{\vec{n}}}{\kappa^*_{\vec{n}}}\right) \mathfrak{Im}[\alpha_n(t,t_0)]. \tag{2.3.24}$$

Por otra parte, como $|\kappa_{\vec{n}}| > |\ _{\vec{n}}|$, la secuencia $\{\ _{\vec{n}}/\kappa^*_{\vec{n}}\}$ está acotada en módulo. Y puesto que ya sabemos que $\{\beta_n(t,t_0)\}$ es de cuadrado sumable (dada la unitariedad de la dinámica en la cuantización fijada por $J_0$), podemos garantizar que las secuencias de los dos primeros sumandos a la derecha de la igualdad (2.3.24) son de cuadrado sumable, $\forall t \in\ $ . Por consiguiente, al ser el conjunto de secuencias un espacio lineal, concluimos que

$$\left\{\left(\frac{\ _{\vec{n}}}{\kappa^*_{\vec{n}}}\right)\mathfrak{Im}[\alpha_n(t,t_0)]\right\} \tag{2.3.25}$$

también debe ser de cuadrado sumable $\forall t \in\ $ .

Para estudiar el término $\mathfrak{Im}[\alpha_n(t,t_0)]$ necesitamos emplear el comportamiento asintótico de los coeficientes $\alpha_n$ hasta el primer término subdominante, obtenido en la referencia [103] asumiendo que la función de masa $M(t)$ tiene una segunda derivada que es integrable en cualquier subintervalo compacto del intervalo temporal   considerado. Con ello y nuestro anterior resultado de que la secuencia (2.3.25) es de cuadrado sumable, se deduce la existencia a todo tiempo de la función

$$z(\ ) := \sum_{\vec{n}} \frac{|\ _{\vec{n}}|^2}{|\kappa_{\vec{n}}|^2} \operatorname{sen}^2\left[\omega_n\ \ + \frac{1}{2\omega_n}\int_0\ dt' M(t'+t_0)\right], \tag{2.3.26}$$

donde convenientemente hemos introducido el desplazamiento temporal $\ = t - t_0$, definido en el intervalo $\tilde{\ }$ obtenido al desplazar el intervalo original  . En particular, la función $z(\ )$ está bien definida dentro de cualquier intervalo de tiempo cerrado $\bar{\ } \subset \tilde{\ }$. Llegados a este punto, el teorema de Luzin [109] nos garantiza que existe un intervalo temporal $S \subset \bar{\ }$, tan cercano en medida a $\bar{\ }$ como nosotros queramos, tal que en él puede definirse una función $F_S$ continua que coincide con la función $z(\ )$. Por tanto, la integral $I_S := \int_S F_S(\ )d\ $ es finita y real, al ser $F_S$ continua y real. Por otra parte, un cálculo cuidadoso, aunque elemental, muestra que existe un autovalor del laplaciano $\omega_n^0$ tal que permite una cota inferior positiva $\Lambda > 0$ a las integrales de las sinusoidales que aparecen en la ecuación (2.3.26):

$$\int_S \mathrm{sen}^2 \left[ \omega_n \quad + \int_0 \quad dt' \frac{M(t'+t_0)}{2\omega_n} \right] d \quad \geq \Lambda, \quad \forall n \geq n_0. \tag{2.3.27}$$

Entonces, como todos los sumandos que aparecen en la suma de la expresión (2.3.26) son no-negativos, no es difícil comprobar que se cumple

$$\sum_{n_0 \leq n < M;\ \vec{n}} \frac{|\ _{\vec{n}}|^2}{|\kappa_{\vec{n}}|^2} \leq \frac{I_S}{\Lambda}, \tag{2.3.28}$$

para todas las sumas parciales de los elementos $|\ _{\vec{n}}|^2/|\kappa_{\vec{n}}|^2$ (sobre ternas para las que $\omega_n$ es mayor o igual que $\omega_0$ pero menor que un cierto número $\omega_M$). Ahora bien, como estos elementos son todos no-negativos, de forma que las sumas parciales forman una secuencia creciente, el hecho de que exista una cota superior para las mismas (a saber, $I_S/\Lambda$) implica que convergen. Esto es, $\sum_{\vec{n}} |\ _{\vec{n}}|^2/|\kappa_{\vec{n}}|^2 < \infty$.

La convergencia demostrada precisa que $|\ _{\vec{n}}|/|\kappa_{\vec{n}}|$ debe tender a cero para $n \to \infty$. Y como $|\kappa_{\vec{n}}|^2 = 1 + |\ _{\vec{n}}|^2$, en particular, debe ser $|\ _{\vec{n}}|$ la que se anule en el límite considerado, por lo que $|\kappa_{\vec{n}}|$ ha de tender forzosamente a uno. En particular, la secuencia de elementos $|\kappa_{\vec{n}}|$ debe estar acotada superiormente y, como consecuencia, $1/|\kappa_{\vec{n}}|$ debe estarlo inferiormente. Empleando esto último y la convergencia de $\sum_{\vec{n}} |\ _{\vec{n}}|^2/|\kappa_{\vec{n}}|^2$, concluimos finalmente que

$$\sum_{\vec{n}} |\ _{\vec{n}}|^2 < \infty, \tag{2.3.29}$$

como queríamos demostrar. Por lo tanto, todas las estructuras complejas que son invariantes y proporcionan una dinámica unitaria resultan ser unitariamente equivalentes entre sí.

## 2.4. Unicidad de la representación del campo

Una vez demostrado que nuestro criterio permite seleccionar una única familia de representaciones de Fock equivalentes entre sí para la cuantización de un campo de Klein-Gordon con una masa dependiente del tiempo en un espacio-tiempo plano con la topología espacial del tres-toro, vamos a ver que éste además determina un único par canónico para el campo entre todos aquéllos que están relacionados a través de transformaciones canónicas que dependen del tiempo y que reescalan la variable de configuración.

### 2.4.1. Transformaciones canónicas

La transformación canónica lineal más general que incluye un reescalado de la variable de configuración del campo a través de un coeficiente que depende del tiempo se puede expresar de la siguiente forma

$$\phi = f(t)\varphi, \qquad P_\phi = \frac{P_\varphi}{f(t)} + g(t)\varphi, \tag{2.4.1}$$

teniendo en cuenta en la expresión de la transformación del momento que el determinante del tres-toro es igual a uno. Asumimos que las funciones reales $f(t)$ y $g(t)$ que caracterizan la transformación son, al menos, doblemente diferenciables, para respetar las propiedades de diferenciabilidad de las ecuaciones del campo. Además, suponemos que la función $f(t)$ no se anula para ningún tiempo $t$, de manera que no aparezca ninguna singularidad espuria en el campo. Luego, buscando que el par original y el trasformado coincidan en el instante inicial, y sin pérdida de generalidad, podemos fijar los valores iniciales de las dos funciones de manera que $f(t_0) = 1$ y $g(t_0) = 0$, a través de una transformación lineal canónica constante (que no afecta a la representación de Fock del sistema) [74].

Adoptamos una representación determinada por la estructura compleja $J_0$ para el nuevo par $(\phi, P_\phi)$. La transformación dependiente del tiempo afecta directamente a la dinámica del campo. Esencialmente, la transformación que proporciona la evolución temporal de estas nuevas variables puede obtenerse a partir de la matriz original, $U$, como [105]

$$\tilde{U}_n(t, t_0) = C_n(t) U_n(t, t_0), \tag{2.4.2}$$

donde

$$C_n(t) = \begin{pmatrix} F_+(t) + iG_n(t) & F_-(t) + iG_n(t) \\ F_-(t) - iG_n(t) & F_+(t) - iG_n(t) \end{pmatrix}, \tag{2.4.3}$$

$$2F_\pm(t) = f(t) \pm \frac{1}{f(t)}, \qquad G_n(t) = \frac{g(t)}{2\omega_n}. \tag{2.4.4}$$

Por otro lado, aprovechando la caracterización general de las estructuras complejas invariantes $J$, podemos ver que la nueva dinámica $\tilde{U}$ admitiría una implementación unitaria respecto a $J$ si y sólo si los coeficientes de Bogoliubov beta de la transformación con bloques $\mathcal{K}_{\vec{n}}^{-1} C_n(t) U_n(t, t_0) \mathcal{K}_{\vec{n}}$ fueran de cuadrado sumable sobre todos los posibles valores de $\vec{n}$. En esta ocasión, los nuevos coeficientes, $\tilde{\beta}^J_{\vec{n}}(t, t_0)$, adoptan una expresión similar a la dada en la ecuación (2.3.22), pero con el nuevo par

$$\tilde{\alpha}_n(t, t_0) = F_+(t)\alpha_n(t, t_0) + F_-(t)\beta_n^*(t, t_0) + iG_n(t)[\alpha_n(t, t_0) + \beta_n^*(t, t_0)], \tag{2.4.5}$$

$$\tilde{\beta}_n(t, t_0) = F_+(t)\beta_n(t, t_0) + F_-(t)\alpha_n^*(t, t_0) + iG_n(t)[\beta_n(t, t_0) + \alpha_n^*(t, t_0)], \tag{2.4.6}$$

asociado a la evolución $\tilde{U}$ en la representación de $J_0$. En lo que resta de sección, demostraremos, pues, que esta dinámica no es unitariamente implementable respecto a ninguna estructura compleja invariante, a menos que el escalado sea trivial, es decir, que $f(t) = 1$ y $g(t) = 0$ para todos los tiempos.

### 2.4.2. Unicidad del reescalado

Para cada autovalor del operador de Laplace-Beltrami,$-\omega_n^2$, vamos a escoger un elemento (arbitrario) $\vec{N}_n$ de $\vec{n}$, de manera que obtenemos un subconjunto $\{\tilde{\beta}^J_{\vec{N}_n}(t, t_0)\}$ de funciones beta ignorando la degeneración de los autoespacios $Q_n$. Como ya hemos argumentado, si admitimos que la dinámica generada por $\tilde{U}$ es unitaria, entonces, la secuencia de elementos $\tilde{\beta}^J_{\vec{n}}(t, t_0)$ debe ser de cuadrado sumable para todos los tiempos y, como consecuencia, también lo será el subconjunto seleccionado. Recordando el comportamiento asintótico (2.3.2) y teniendo en cuenta que $|\kappa_{\vec{N}_n}| \geq 1$, no es muy difícil comprobar que la condición de sumabilidad implica entonces que los términos

$$\left[e^{i\omega_n(t-t_0)} - z^2_{\vec{N}_n} e^{-i\omega_n(t-t_0)}\right] F_-(t) - 2iz_{\vec{N}_n} \operatorname{sen}[\omega_n(t-t_0)] F_+(t), \tag{2.4.7}$$

tienden a cero para grandes valores de $n$, $\forall t \in$ . Por comodidad, aquí hemos definido la cantidad $z_{\vec{n}} := {}_{\vec{n}}/\kappa^*_{\vec{n}}$.

Ahora introducimos las partes reales e imaginarias de $z_{\vec{N}_n}$:

$$z_{\vec{N}_n} = \mathfrak{R}_{\vec{N}_n} + i\mathfrak{I}_{\vec{N}_n}. \tag{2.4.8}$$

Un cálculo rápido muestra que una condición necesaria para que el límite de (2.4.7) cuando $n \to \infty$ se anule es que la secuencia

$$F_-(\mathfrak{R}^2_{\vec{N}_n} + \mathfrak{I}^2_{\vec{N}_n} - 1)[(1 + \mathfrak{R}^2_{\vec{N}_n} + \mathfrak{I}^2_{\vec{N}_n})F_- - 2\mathfrak{R}_{\vec{N}_n} F_+] \tag{2.4.9}$$

también se anule en dicho límite, para cada tiempo [hemos obviado la dependencia temporal explícita de las funciones $F_\pm(t)$ con tal de simplificar la notación]. Por otro lado, en la referencia [107] se mostró de manera detallada (y para cualquier topología de las secciones espaciales compactas) que una condición adicional necesaria para la implementación unitaria de la dinámica es que la secuencia $(\mathfrak{R}^2_{\vec{N}_n} + \mathfrak{I}^2_{\vec{N}_n} - 1)$ no tienda a cero.

El último paso consiste en probar que la exigencia sobre la unitariedad de la dinámica fuerza que $f(t)$ sea igual a la función unidad. Para la demostración, vamos a usar el método de reducción al absurdo. Supongamos que la función $f(t)$ no es idénticamente igual a la unidad. En ese caso, tendríamos que $f(t) \neq 1$ para ciertos instantes de tiempo $t$. Nos centraremos, pues, en esos valores, para llegar a demostrar que entramos en una contradicción. Es inmediato que $F_{-}(t) \neq 0$ para dichos puntos, y recordamos que $f(t)$ es una función continua y positiva.

Entonces, volviendo a la expresión (2.4.9), nos damos cuenta de que

$$(\mathfrak{R}^2_{\vec{N}_n} + \mathfrak{I}^2_{\vec{N}_n} - 1)[(1 + \mathfrak{R}^2_{\vec{N}_n} + \mathfrak{I}^2_{\vec{N}_n})F_{-} - 2\mathfrak{R}_{\vec{N}_n} F_{+}] \tag{2.4.10}$$

debería tender a cero. Además, puesto que, como hemos dicho, la secuencia formada por $(\mathfrak{R}^2_{\vec{N}_n} + \mathfrak{I}^2_{\vec{N}_n} - 1)$ no puede tender a cero para grandes valores de $n$ [107], podemos asegurar que existe un número $\epsilon > 0$ y una subsecuencia $S$ de enteros positivos $n$ para la cual $|\mathfrak{R}^2_{\vec{N}_n} + \mathfrak{I}^2_{\vec{N}_n} - 1| > \epsilon$. Es evidente que este hecho implica que el segundo factor que aparece en la ecuación (2.4.10) debe anularse en el límite para dicha subsecuencia. Utilizando este resultado, deducimos que la siguiente expresión debe tener límite igual a cero en $S$:

$$f^2(t)[(1 - \mathfrak{R}_{\vec{N}_n})^2 + \mathfrak{I}^2_{\vec{N}_n}] - [(1 + \mathfrak{R}_{\vec{N}_n})^2 + \mathfrak{I}^2_{\vec{N}_n}]. \tag{2.4.11}$$

Dado que las dos secuencias independientes del tiempo $(1-\mathfrak{R}_{\vec{N}_n})^2 + \mathfrak{I}^2_{\vec{N}_n}$ y $(1+\mathfrak{R}_{\vec{N}_n})^2 + \mathfrak{I}^2_{\vec{N}_n}$ no pueden tender a cero a la vez, entonces, la última condición requiere directamente que la función $f(t)$ tome exactamente los mismos valores en todos los instantes de tiempo que estamos considerando (es decir, aquéllos donde $f(t) \neq 1$). De esta forma, llegamos a la conclusión de que la función $f(t)$ puede tomar a lo sumo dos valores distintos: uno de ellos igual a 1 (el valor inicial en $t_0$) y otro que hemos asumido que es distinto de la unidad. Sin embargo, dicho comportamiento entra en conflicto con la continuidad de la función. Esta contradicción prueba entonces que la única posibilidad consistente es que $f(t)$ sea idénticamente igual a 1, como queríamos demostrar.

Por consiguiente, hemos confirmado que no existe ningún reescalado del campo compatible con nuestro criterio de invariancia bajo las isometrías del tres-toro y unitariedad de la dinámica.

### 2.4.3. Unicidad del momento del campo

Recordemos la expresión de las funciones beta para la dinámica del sistema después de introducir la transformación lineal dependiente del tiempo particularizada al caso en que $f(t) = 1$ (de acuerdo con la discusión de la subsección anterior). Y volvamos a la condición de sumabilidad del conjunto formado por $\tilde{\beta}^J_{\vec{n}}(t, t_0)$ en todo el dominio temporal. De nuevo, como $|\kappa_{\vec{n}}| \geq 1$, esta condición nos asegura la misma propiedad para el conjunto $\tilde{\beta}^J_{\vec{n}}(t, t_0)/(\kappa^*_{\vec{n}})^2$. Además, utilizando las relaciones asintóticas (2.3.2), y que $|z_{\vec{n}}| \leq 1$, uno puede deducir que

$$G_n(t) \left\{ e^{i[\omega_n(t-t_0)-\delta_{\vec{n}}]} + |z_{\vec{n}}|^2 e^{-i[\omega_n(t-t_0)-\delta_{\vec{n}}]} + 2|z_{\vec{n}}| \cos[\omega_n(t - t_0)] \right\}$$

$$+2|z_{\vec{n}}|\mathfrak{Im}\left[\alpha_n(t,t_0)\right] \tag{2.4.12}$$

es de cuadrado sumable. Aquí, $\delta_{\vec{n}}$ es la fase de $z_{\vec{n}}$. Obviamente, la condición también es cierta para el conjunto obtenido al dividir estos términos por $\omega_n$, puesto que el autovalor proporciona una secuencia que diverge a infinito. Por tanto, utilizando que $g_n/\omega_n^4$ es de cuadrado sumable (tal y como demostramos en la sección 2.3.1) y recordando la definición de $G_n(t)$, concluimos que el conjunto de elementos $|z_{\vec{n}}|\mathfrak{Im}\left[\alpha_n(t,t_0)\right]/\omega_n$ debe ser de cuadrado sumable. Luego, haciendo un promedio temporal de forma conveniente y utilizando, de nuevo, el teorema de Luzin, uno puede demostrar que el conjunto $|z_{\vec{n}}|/\omega_n$ tiene que ser de cuadrado sumable.

Teniendo en cuenta este resultado en los términos de (2.4.12), llegamos a que

$$G_n(t)e^{i[\omega_n(t-t_0)-\delta_{\vec{n}}]}+2|z_{\vec{n}}|\mathfrak{Im}\left[\alpha_n(t,t_0)\right] \tag{2.4.13}$$

tiene cuadrado sumable. En particular, también es de cuadrado sumable la parte imaginaria de estas cantidades, a saber,

$$\frac{g(t)}{2\omega_n}\,\mathrm{sen}\,[\omega_n(t-t_0)-\delta_{\vec{n}}], \tag{2.4.14}$$

donde hemos usado la definición de $G_n(t)$. Entonces, si existiera un subintervalo de   donde la función $g(t)$ no se anulara, una integración temporal apropiada podría llevarnos a la conclusión de que la secuencia de elementos $g_n/\omega_n^2$ debe ser sumable [107]. Sin embargo, sabemos que esta secuencia tiene una suma divergente, puesto que supera la dada por $D_N/(N+1)^2$ sobre los enteros positivos, que claramente diverge, una vez discutido el comportamiento asintótico de $D_N \propto N^2$ en la sección 2.3.1. Esto elimina cualquier posibilidad de que la función $g(t)$ pueda diferir de cero para cualquier subintervalo temporal de  . Nuevamente, puesto que la función es continua, esto implica que $g(t)$ tiene que ser igual a la función cero en todos los puntos.

Recapitulando, nuestro criterio determina por completo la elección del par canónico que define el campo entre todas las posibles que estén relacionadas a través de una transformación canónica lineal dependiente del tiempo. Este criterio elimina toda la libertad que teníamos en el reescalado del campo, y en la redefinición del momento incluyendo cualquier contribución que sea lineal en la variable de configuración del campo.

# 3

# Generalización del criterio de unicidad en procesos con cambios de signatura en cosmología

## 3.1. Introducción

Con el fin de eliminar la ambigüedad inherente a la Teoría Cuántica de Campos en espacio-tiempos curvos, en el capítulo anterior se ha mostrado que, en ciertas situaciones no estacionarias, todavía es posible recuperar un criterio de unicidad que permite seleccionar variables canónicas para los campos y una representación de Fock para ellas tal que: i) el estado de vacío es invariante bajo el grupo de simetrías espaciales de la ecuación de campo, y ii) la dinámica del sistema cuántico es unitaria.

Como extensión de estos resultados, hemos querido estudiar las ecuaciones de movimiento de segundo orden más generales sobre las que podemos aplicar nuestros criterios de unicidad, permitiendo no sólo reescalados del campo dependientes del tiempo, sino también una reparametrización del tiempo. Demostraremos que, en este contexto, dada una ecuación de movimiento genérica, siempre es posible pasar a una ecuación de Klein-Gordon que, como ya hemos discutido, admite una representación de Fock esencialmente única tal que es invariante bajo simetrías espaciales y la evolución temporal puede implementarse de forma unitaria. Además, veremos que la relación entre estas dos ecuaciones es unívoca.

Otra de las finalidades es proporcionar una interpretación espacio-temporal de las ecuaciones que aquí estudiamos. Durante el desarrollo veremos que, bajo ciertas condiciones, surge la posibilidad de tener un cambio de régimen en la ecuación de campo, de una evolución temporal hiperbólica a una de tipo elíptico. Nos referiremos a este cambio de régimen como un cambio de signatura. Este fenómeno puede analizarse como un cambio en el comportamiento de la coordenada de tiempo, que se refleja mediante un cambio de signo de la componente temporal del tensor métrico, de manera que la signatura pasa de $(- + ++)$ a $(+ + ++)$ [110, 111].

El debate sobre la posibilidad de tener un cambio de signatura en el marco de Relatividad General ya se ha investigado y se ha discutido desde diferentes perspectivas en la literatura, relativas al propio mecanismo físico así como a su tratamiento matemático. Quizás la manifestación más relevante fue la de Hartle y Hawking, a principios de los ochenta, cuando plantearon la propuesta del Universo sin condiciones de frontera [112–114], explicada a través de una integral de camino euclídea sobre geometrías con frontera correspondiente a la región observable del Universo [112]. Al menos en estos sencillos modelos, este estado podría interpretarse como aquél que experimenta un proceso en el cuál la signatura del universo primordial cambia, pasando de ser euclídea a lorentziana [112–114]. En general, sin embargo, el estado debe definirse mediante una integral de camino sobre contornos de integración complejos [115] y, en este proceso de complexificación, la interpretación del cambio de signatura no es tan clara.

Recientemente, el cambio de signatura que anticiparon estos estudios pioneros ha reaparecido de forma diferente en algunos de los trabajos de LQC con modelos de simetría reducida [54–56]. Como ya explicamos en la Introducción, en LQG, la cuantización del espacio cerca de la escala de Planck se manifiesta mediante la discretización del espectro de los operadores geométricos, por ejemplo el área y el volumen. Los efectos de discretización del espacio se introducen bien mediante una corrección a las holonomías [55, 56, 116–124], bien a través de correcciones que surgen de la regularización de la inversa del volumen [46–48, 50, 54, 125–130], modificando en ambos casos las ligaduras clásicas [49, 131–136]. Este procedimiento se ve afectado por varias ambigüedades, y el álgebra resultante no es cerrada, en general. Existen sólo ciertas maneras de variar las ligaduras de forma que el álgebra cierre [56]. Sin embargo, no sólo la dinámica del sistema clásico cambia, sino que la estructura del espacio-tiempo efectivo también se deforma como resultado de la modificación de las ligaduras. Esto se puede ver cuando consideramos perturbaciones escalares sobre un fondo plano de FLRW [55, 136]. En este escenario, la ecuación de evolución para el invariante de gauge $v$ que describe las perturbaciones escalares [137], llamada ecuación de Mukhanov-Sasaki [83, 84], es

$$v'' - \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_{crit}}\right)\Delta v - \frac{z''}{z}v = 0. \tag{3.1.1}$$

Aquí, $\rho_{crit}$ es la densidad crítica, a la que se produce el rebote en LQC, y $z$ es una función que solamente depende del fondo. Como veremos, esta ecuación indica que existe una transición entre un espacio-tiempo de régimen lorentziano, para $\rho < \rho_{crit}/2$, y uno de régimen euclídeo, para $\rho > \rho_{crit}/2$. Es decir, en regiones de densidades de energía altas, la descripción efectiva obtenida parece conllevar un espacio-tiempo que se hace euclídeo. Las consecuencias de esto todavía no se entienden; sin embargo aquí veremos cómo podemos proceder en estos nuevos escenarios dentro del esquema de Teoría Cuántica de Campos. El cambio desde un espacio-tiempo euclídeo a otro lorentziano ocurre sobre una hipersuperficie espacial, en un tiempo $t_d$, en una época muy temprana del universo, y separa dos regiones con propiedades muy distintas. El debate sobre el tratamiento de este fenómeno conduce a analizar el comportamiento de la geometría al cruzar esa frontera y estudiar la evolución de un estado físico de vacío cuando pasa de una región a otra. El último asunto que presentaremos en este capítulo es la posibilidad de que exista una producción de partículas como consecuencia de este cambio de signatura.

## 3.2. Generalización de las ecuaciones de campo

Nuestro objetivo principal es investigar cómo podemos extender los criterios de unicidad que presentamos en el capítulo anterior para aplicarlos al mayor número de sistemas físicos posible. Para ello, vamos a considerar la ecuación de movimiento de segundo orden más general, pero manteniendo que la variación espacial aparezca reflejada únicamente mediante el operador de Laplace-Beltrami. Nuestra intención es establecer un procedimiento para la cuantización de estos sistemas de campos clásicos y asegurarnos de que los modelos cuánticos que vayamos a construir estén libres de ambigüedades, de manera que sus predicciones sean fiables y, al compararlas con las observaciones, tengan una significación real que permita corroborar o desechar tales modelos. Por consiguiente, vamos a estudiar un campo escalar real $\varphi$ que satisface una ecuación de movimiento general de segundo orden con coeficientes dependientes del tiempo de la forma:

$$\varphi'' + c(t)\varphi' - d(t)\Delta\varphi + \widetilde{m}^2(t)\varphi = 0. \tag{3.2.1}$$

Para relacionar esta ecuación con la ecuación de evolución (2.2.1), a la que podemos aplicar nuestro criterio de unicidad, generalizado a cualquier topología de las secciones compactas en las referencias [78, 79],contamos con dos tipos de transformaciones. Por un lado, podemos introducir cualquier reparametrización del tiempo de la forma $(t)$, dada por una función biyectiva en el intervalo estudiado. En todas las consideraciones sobre la unitariedad de la dinámica, solamente se han discutido transformaciones finitas entre distintos instantes de tiempo. Nuestros resultados no atañen directamente a las transformaciones infinitesimales, ni a sus posibles generadores. Es claro que, si la evolución desde un tiempo inicial $t_0$ a uno final $t$ está implementada por un operador unitario $\hat{U}(t, t_0)$, entonces existe un operador unitario que implementa la evolución en el tiempo reparametrizado, desde el instante inicial

$_0 = t(t_0)$ al instante final $\ \ = \ \ (t)$, a saber: $\hat{U}(\ \ ,\ \ _0) = \hat{U}\big(t(\ \ ), t_0(\ \ _0)\big)$. Por otro lado, como hemos discutido, podemos variar nuestro par canónico para el campo mediante transformaciones lineales dependientes del tiempo en las que se reescale la variable de configuración. Sabemos que, para cualquiera de esos nuevos pares canónicos, es necesario realizar la transformación que lleva al par original para poder hallar una representación de Fock con dinámica unitaria.

Por tanto, para nuestro análisis, introducimos un reescalado del campo y una reparametrización del tiempo dados por

$$\varphi(t, \vec{x}) = f(t)\phi(t, \vec{x}), \qquad d\ \ \ = r(t)dt. \tag{3.2.2}$$

La reparametrización está bien definida si $r(t)$ es una función definida positiva – o negativa – en todo el dominio temporal   (e integrable en cada subintervalo compacto). Ahora, substituyendo estas expresiones en la ecuación (3.2.1), y, tras ajustar el coeficiente de la segunda derivada temporal a la unidad, si imponemos que el término que va con la primera derivada del campo se anule y la función que multiplica al operador de Laplace-Beltrami que sea constante, como ocurre en (2.2.1), encontramos (asumiendo que la función $r(t) \neq 0$, según nuestra exposición anterior) que

$$r(t) \;=\; s\sqrt{d(t)}, \qquad s = \pm, \tag{3.2.3}$$

$$f(t) \;=\; C d(t)^{-1/4} \exp\left[-\frac{1}{2}\int^{t} c(\tilde{t})d\tilde{t}\right], \tag{3.2.4}$$

donde $C \neq 0$ es una constante numérica que introducimos por conveniencia, en vez de reabsorberla en el límite inferior de integración sobre $c(t)$. En consecuencia, podemos afirmar que siempre es posible pasar a una formulación del campo con las propiedades deseadas. Además, la transformación es única, salvo cambio de orientación en el tiempo (esto es, salvo elección del signo $s$). En otras palabras, para cada ecuación de movimiento de segundo orden siempre podemos encontrar una transformación única, definida por un reescalado del campo y/o una reparametrización del tiempo, que nos lleve a una descripción que cumple la ecuación de evolución (2.2.1), sin importar la forma de la masa del campo original. Y, como ya sabemos, esta nueva descripción admite una representación de Fock esencialmente única que nos asegura la invariancia bajo las simetrías espaciales y la implementación unitaria de la dinámica.

La nueva función de masa del campo $\phi$ viene dada por

$$M(t) = \frac{\widetilde{m}^2(t)}{d(t)} - \frac{d''(t)}{4d^2(t)} + \frac{5(d'(t))^2}{16d^3(t)} - \frac{c'(t)}{2d(t)} - \frac{c^2(t)}{4d(t)}. \tag{3.2.5}$$

De acuerdo con esta expresión, podemos ver que la nueva masa explota $[M(t) \to \infty]$, en general, si la función $d(t)$ se anula para algún tiempo $t$. Además, en la ecuación (3.2.3) también podemos ver que cuando la función $d(t)$ se haga negativa empezaremos a tener problemas, ya que el tiempo pasará a ser imaginario. Estas cuestiones se analizarán con más detalle en las próximas secciones. No obstante, hacemos notar también que, a partir de la reparametrización que hemos introducido, no se puede garantizar *a priori* que la función de masa transformada (3.2.5) sea positiva; sin embargo, esto no supone ningún obstáculo insalvable para la aplicación de nuestro criterio de unicidad [106, 107]. La única restricción que debemos tener en cuenta es que, como ya hemos argumentado, la nueva masa debe tener una segunda derivada integrable en cualquier subintervalo compacto de tiempo; por lo tanto, necesitaremos, por ejemplo, que se cumpla la misma condición para la masa del campo original y que las funciones $c(t)$ y $d(t)$ tengan una tercera y una cuarta derivada integrable (en subintervalos compactos), respectivamente, una vez asumido que la función $d$ mantiene un signo bien definido en el intervalo considerado.

Por completitud, vamos a discutir la parte de la transformación canónica dependiente del tiempo que afecta al momento canónico del campo. Para ello, partimos de la expresión más general del momento del campo original, lineal en la configuración y su derivada temporal, con coeficientes dependientes del tiempo y debidamente densitizada

$$P_\varphi = \sqrt{h}\,(A\varphi + B\dot{\varphi})\,. \tag{3.2.6}$$

Aquí, el punto denota la derivada respecto al nuevo tiempo , $h$ es el determinante de la métrica espacial del caso específico que estemos considerando (para no restringirnos únicamente al caso del tres-toro), y $A$ y $B$ son dos funciones del tiempo arbitrarias. Con el fin de poder aplicar nuestros resultados de unicidad, debemos asegurarnos de que el momento conjugado del nuevo campo sea $P_\phi = \sqrt{h}\dot{\phi}$. Empleando este requisito junto con la exigencia de que la transformación sea canónica, deducimos la posible forma de $B$: $B = f^{-2}$. Con ello, llegamos finalmente a la expresión más general permitida para $P_\varphi$ y para la transformación buscada [con $t = t(\ )$]

$$P_\varphi = \sqrt{h}\left(A(t)\varphi + \frac{1}{f^2(t)}\dot{\varphi}\right), \tag{3.2.7}$$

$$P_\phi = f(t)P_\varphi - \sqrt{h}\left(f(t)A(t) + \frac{\dot{f}(t)}{f^2(t)}\right)\varphi. \tag{3.2.8}$$

## 3.3. Interpretación espacio-temporal de las ecuaciones de movimiento

Para dotar a nuestras ecuaciones de campo generalizadas con una interpretación física, de modo que se puedan entender como ecuaciones de Klein-Gordon generalizadas de un campo escalar propagándose sobre un fondo no-estacionario, vamos a considerar la siguiente métrica que describe un espacio-tiempo conformemente ultraestático (esto es, con un Killing temporal que puede tomarse de norma constante) con secciones espaciales normales,

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t)h_{ij}(x)dx^i dx^j, \tag{3.3.1}$$

donde $N^2(t)$ es la función lapso de la descomposición $3+1$ de la métrica [88], $a(t)$ es el factor de escala y $h_{ij}$ son las componentes de la métrica de las secciones espaciales.

Construyendo el dalambertiano de esta métrica y sustituyéndolo en la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar con función de masa dependiente del tiempo $\bar{M}(t)$, llegamos a

$$\varphi'' + \left[\ln\left(\frac{a^3(t)}{N(t)}\right)\right]' \varphi' - \frac{N^2(t)}{a^2(t)}\Delta\varphi + N^2(t)\bar{M}(t)\varphi = 0. \tag{3.3.2}$$

Podemos comparar esta expresión con la ecuación (3.2.1) y escribir los parámetros de la métrica (3.3.1) en función de los coeficientes $c(t)$ y $d(t)$, de donde obtenemos que

$$a^4(t) = d(t)\exp\left[\int^t 2c(\tilde{t})d\tilde{t}\right], \tag{3.3.3}$$

$$N^4(t) = d^3(t)\exp\left[\int^t 2c(\tilde{t})d\tilde{t}\right]. \tag{3.3.4}$$

Por tanto, la familia de ecuaciones de segundo orden (3.2.1) está en correspondencia biunívoca con las ecuaciones de campo de Klein-Gordon en el conjunto de espacio-tiempos (3.3.1).

Además, la igualdad entre las ecuaciones de evolución consideradas también nos permite relacionar los términos de masa, relacionados mediante la expresión:

$$\widetilde{m}^2(t) = N^2(t)\bar{M}(t). \tag{3.3.5}$$

Esto es, la masa de la ecuación (3.2.1) escala linealmente con la función lapso.

A simple vista, la primera conclusión que obtenemos es que, cuando $d(t)$ se hace cero, también se anulan el factor de escala $a(t)$, la función lapso $N(t)$ y, por ende, la masa $\widetilde{m}(t)$. Es importante resaltar que el lapso tiende a cero más rápidamente que el factor de escala, de acuerdo con la dependencia de ambos con $d(t)$ en las expresiones (3.3.3) y (3.3.4). Otro resultado interesante que se deduce de forma inmediata de nuestras relaciones es que, cuando trabajamos en este tipo de espacio-tiempos y reparametrizamos el tiempo según (3.2.3), el reescalado óptimo (3.2.4) es (salvo por una constante multiplicativa $C \neq 0$ irrelevante) la inversa del factor de escala, tal y como esperábamos: $f(t) = C/a(t)$.

Llegados a este punto, podemos reescribir el elemento de línea (3.3.1) en términos de las funciones $c(t)$ y $d(t)$:

$$\begin{aligned} ds^2 &= [-d(t)dt^2 + h_{ij}(x)dx^i dx^j]a^2(t) \\ &= [-d(t)dt^2 + h_{ij}(x)dx^i dx^j]\sqrt{d(t)}\exp\left[\int^t c(t)dt\right], \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

lo que nos va a permitir analizar el dominio de validez de nuestra teoría y darle una interpretación espacio-temporal.

En el caso de que la función $d(t)$ se anule para un tiempo $t_d$, comprobamos que la métrica degenera totalmente y la interpretación espacio-temporal pierde todo sentido: en principio, no podemos decir nada sobre lo que ocurre en ese tiempo. Es más, si calculamos el escalar de curvatura $R$ asociado a la métrica, vemos que éste explota como $d^{-7/2}$. Debido al interés en el cambio de régimen hiperbólico a elíptico existente en LQC en la actualidad, por aparecer en las ecuaciones de movimiento efectivas deducidas mediante ciertas hipótesis sobre el cierre del álgebra de ligaduras [54–56], es particularmente relevante analizar el comportamiento de las variables de Ashtekar-Barbero cuando $d(t)$ se anula. Recordamos que estas variables son una conexión $su(2)$ y una tríada densitizada, canónicamente conjugadas. Permiten una descripción alternativa de la Relatividad General, con un lenguaje similar al de las teorías gauge. En la teoría clásica, como ya hemos explicado, la conexión de Ashtekar-Barbero es la suma de la curvatura extrínseca en forma triádica, $K_i^a$, y de la conexión $su(2)$ de espín compatible con la tríada. Si calculamos estas variables de Ashtekar-Barbero para las métricas (3.3.6), vemos que la tríada densitizada $E_a^i$ escala con $a^2(t)$ y, por lo tanto, también resulta totalmente degenerada al anularse $d(t)$. Mucho más relevante es el comportamiento de la conexión. Aunque la conexión de espín de la triada espacial es independiente de la función $d(t)$, la curvatura extrínseca $K_i^a$ explota como $d^{-9/4}(t)$. Así pues, el instante $t_d$ en el que $d(t)$ se anula define una singularidad en la teoría, donde las variables fundamentales de la LQG no están bien definidas. Este análisis aclara la confusión existente en la literatura de qué tipo de cambio de signatura ocurre al variar de signo la función que multiplica al operador de Laplace-Beltrami en la ecuación (3.2.1).

Por otro lado, si $d(t) < 0$, la métrica pasa a tener signatura euclídea. Para evitar métricas complejas, podemos reescribir el factor de escala como

$$a^2(t) = \widetilde{C}\sqrt{|d(t)|}\exp\left[\int_{t_d}^t c(\tilde{t})d\tilde{t}\right]. \tag{3.3.7}$$

En cuanto a $\widetilde{C}$, es una constante positiva que surge al fijar el límite inferior en la integral, redefinida para absorber la raíz cuadrada del signo de la función $d(t)$.

Como ya avanzamos al principio de este capítulo, aparece así un cambio en la signatura de la métrica, pasando de un espacio-tiempo lorentziano, con signatura $(-+++)$, a otro euclídeo,

$(++++)$. En la ecuación (3.2.1) se aprecia que la transición a un comportamiento euclídeo conlleva, también, un cambio del tipo de ecuación, de hiperbólica a elíptica. En principio, la singularidad $d(t) = 0$ separa dos regiones espacio-temporales con comportamientos muy distintos. No obstante, en la siguiente sección veremos cómo, con ciertos requisitos de continuidad sobre las soluciones de las ecuaciones de campo, es posible establecer una relación entre la evolución en ambas regiones.

## 3.4. Dinámica del estado de vacío en un cambio de signatura

En este apartado vamos a estudiar la evolución de un estado de vacío fijado en la región de comportamiento euclídeo al pasar a la región lorentziana cuando la función $d(t)$ cambia de signo. El interés físico surge de nuevo de la situación que parece encontrarse en LQC, donde se ha argumentado recientemente que las ecuaciones de evolución para las perturbaciones cosmológicas se ven afectadas por un cambio de este tipo [54–56]. El análisis, no obstante, tiene aplicaciones potenciales en otros campos, y cambios de signaturas relacionados se han estudiado, por ejemplo, en el contexto de condensados de Bose-Einstein [110]. En circunstancias como éstas, es posible que existan requerimientos naturales o plausibles para seleccionar un estado de vacío en la región de comportamiento euclídeo (en el que la ecuación de campo es elíptica). Es de la mayor importancia discutir cómo se traducen esos requerimientos en condiciones sobre el vacío (evolucionado) en la región de comportamiento lorentziano, en la que la unicidad de la cuantización está garantizada por nuestros criterios de invariancia espacial y unitariedad. Nuestra estrategia se basa en la imposición de ciertas condiciones de continuidad en el punto en que se produce el cambio de signatura, en el que recordamos que el factor de escala se anula y la métrica espacio-temporal degenera. El procedimiento que seguiremos será el siguiente. En primer lugar, analizaremos la dinámica del estado de vacío y dichas condiciones de continuidad. Veremos que se produce una generación de partículas cosmológicas durante el proceso de cambio de signatura, y haremos una estimación de esta producción de partículas utilizando una aproximación de tipo WKB [138].

### 3.4.1. Condiciones de continuidad

Como la ecuación de evolución del campo $\phi$ está mal definida cuando se anula la función $d(t)$, ya que, según hemos visto, la función (3.2.5) explota, adoptaremos la descripción en términos del campo de Klein-Gordon $\varphi$, con función de masa $\bar{M}(t)$. Empleando la elección de lapso $N^2 = \varepsilon a^6$, donde $\varepsilon$ es un parámetro dicotómico que coincide con el signo de la función $d(t)$, la ecuación (3.3.2) se reescribe como

$$\ddot{\varphi} = -\varepsilon \left[a^4 \Delta\varphi + a^6 \bar{M}\varphi\right]. \tag{3.4.1}$$

El punto indica ahora la derivada respecto al tiempo $\tau$ seleccionado por nuestro lapso. A partir de las expresiones (3.2.2) y (3.3.3) no es difícil encontrar las siguientes relaciones: $d\ \ ^2 = \varepsilon a^4(\tau) d\tau^2 = d(t)\, dt^2$. Además, asumimos que hemos elegido el origen del tiempo $\tau$ de forma que coincida con el cambio de signatura.

A continuación, tomemos un conjunto completo de soluciones $\{\phi_n^\pm(\ \ )\ \ {}_n(\vec{x})\}$ a la ecuación (2.2.1) del campo $\phi$, donde el superíndice $+$ indica las soluciones de frecuencia positiva y el superíndice $-$ las de frecuencia negativa, y $\ {}_n$ son autofunciones del operador de Laplace-Beltrami con autovalor $-\omega_n^2$. En este apartado, ignoramos la posible degeneración de los autoespacios del operador de Laplace-Beltrami. Asumimos que dichas soluciones están ortonormalizadas con el producto de Klein-Gordon [100]. Podemos entender estas soluciones como las que elige alguna de las estructuras complejas pertenecientes a nuestra única clase de equivalencia, seleccionada por el criterio de invariancia espacial y unitariedad en la evolución para el campo $\phi$ en el régimen lorentziano. Reparametrizamos ese conjunto de soluciones en términos del tiempo $\tau$, y lo reescalamos por el inverso del factor de escala para obtener soluciones del campo de Klein-Gordon $\varphi$ en el sector $\varepsilon = 1$ (régimen lorentziano). Llamamos a este conjunto de soluciones $\{\varphi_n^\pm(\tau)\ \ {}_n(\vec{x})\}$. Para obtener soluciones en el régimen euclídeo, procedemos a realizar una rotación de Wick [139] de estos modos. Asumiendo que la continuación analítica de las soluciones a tiempos imaginarios está bien definida, obtenemos un conjunto para la región con $\varepsilon = -1$, que denominamos

$$\varphi_n^{\pm(E)}(\tau) = \lim_{\tilde{\tau}\to i\tau} \varphi_n^\pm(\tilde{\tau}). \tag{3.4.2}$$

Cualquier solución a las ecuaciones de campo puede expandirse en términos de este conjunto de modos, tanto en la región lorentziana (con $\varepsilon = 1$) como en la euclídea (con $\varepsilon = -1$) alcanzada por la continuación analítica introducida (en ambos casos, con soluciones extendidas al intervalo máximo que permita la ecuación del campo $\varphi$). Llamaremos a los coeficientes de esta expansión $c_n^\pm$ y $c_n^{\pm(E)}$, respectivamente.

Un estado de vacío puede visualizarse como una solución compleja específica de la ecuación de campo, que solamente incluye lo que serían frecuencias positivas respecto a una cierta selección de estructura compleja. Dicha solución puede especificarse, por ejemplo, por condiciones en una sección del espacio-tiempo, siempre que las ecuaciones de campo así lo permitan. Supongamos que, en nuestro caso, las condiciones fijan los coeficientes $c_n^{\pm(E)}$ en la región de comportamiento euclídeo. Por ejemplo, podemos asumir condiciones en un tiempo $\tau_0 < 0$ tales que $c_n^{+(E)} = 1$ y $c_n^{-(E)} = 0$. Estas condiciones determinan la evolución en la región euclídea hasta $\tau = 0$. Allí es necesario relacionar la solución con otra en la región con comportamiento lorentziano. Para ello, adoptaremos las ideas presentadas por Dray y algunos de sus colaboradores [140–142], que requieren la continuidad del campo de Klein-Gordon y de su derivada temporal en la hipersuperficie donde se produce el cambio de signatura. Un análisis más detallado se puede consultar también en la referencia [110]. Hacemos notar que esta continuidad es natural a la vista de la ecuación (3.4.1), que no evidencia ningún comportamiento singular en el cambio de signatura considerado.

Imponiendo estas condiciones de continuidad, obtenemos un sistema lineal que relaciona los coeficientes de la expansión en modos de las regiones euclídea y lorentziana. Para cada modo por separado tenemos que

$$\begin{pmatrix} \varphi_n^{+(E)}(0) & \varphi_n^{-(E)}(0) \\ \dot{\varphi}_n^{+(E)}(0) & \dot{\varphi}_n^{-(E)}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n^{+(E)} \\ c_n^{-(E)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_n^{+}(0) & \varphi_n^{-}(0) \\ \dot{\varphi}_n^{+}(0) & \dot{\varphi}_n^{-}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n^{+} \\ c_n^{-} \end{pmatrix}, \tag{3.4.3}$$

donde la evaluación en cero corresponde al límite en el que el tiempo se acerca al cambio de signatura.

Las soluciones en la región lorentziana están ortonormalizadas con el producto de Klein-Gordon[3], $\langle \phi, \chi \rangle = i(\phi\dot{\chi} - \dot{\phi}\chi)$. En realidad, puede comprobarse que esta ortonormalización es válida tanto para el campo $\varphi$ en el tiempo $\tau$ como para $\phi$ en el tiempo . En concreto, tenemos que $\langle \varphi_n^-, \varphi_m^+ \rangle = \delta_{nm}$, mientras que los productos de dos soluciones de frecuencia positiva o de frecuencia negativa se anulan. Utilizando esta propiedad y definiendo

$$I_n^{(rs)} = \lim_{\tau\to 0} \langle \varphi_n^{r(E)}(-|\tau|), \varphi_m^{s}(|\tau|) \rangle, \qquad r, s = + \text{ ó } -, \tag{3.4.4}$$

se obtiene que la solución del sistema (3.4.3) es

$$\begin{pmatrix} c_n^{+} \\ c_n^{-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_n^{(+-)} & -I_n^{(--)} \\ I_n^{(++)} & I_n^{(-+)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n^{+(E)} \\ c_n^{-(E)} \end{pmatrix}. \tag{3.4.5}$$

Si nos centramos en la elección de vacío determinada por las condiciones $c_n^{+(E)} = 1$ y $c_n^{-(E)} = 0$, esto es, ausencia inicial de la parte de frecuencias negativas, vemos que la combinación que caracteriza el vacío en la región lorentziana viene dada por los coeficientes $c_n^+ = -I_n^{(+-)}$ y $c_n^- = I_n^{(++)}$. Puesto que estos coeficientes corresponden a las contribuciones lorentzianas de frecuencias positivas y negativas, respectivamente, pueden interpretarse como coeficientes de Bogoliubov, en el sentido de que dan las componentes en las que se preservan las frecuencias positivas y en las que se mezclan con negativas. Este último término de mezcla predice, pues, la producción de partículas a partir del estado que hemos tomado como vacío ($c_n^- \neq 0$).

[3]Siendo más precisos, las soluciones son ortonormales respecto al producto $\langle \phi, \chi \rangle_{KG} = \langle \phi^*, \chi \rangle$.

Por completitud, construimos el campo $\phi$ con evolución unitaria en la región de comportamiento lorentziano:

$$\phi = a(\quad) \sum_n \left\{ \left( c_n^+ \varphi_n^+[t(\quad)] + c_n^- \varphi_n^-[t(\quad)] \right) \quad {}_n(\vec{x}) \right\}. \tag{3.4.6}$$

## 3.4.2. Aproximación WKB: producción de partículas

En la región ultravioleta ($\omega_n \gg 1$), podemos despreciar el término de masa en la ecuación (3.4.1) en comparación con el término de Laplace-Beltrami (para valores finitos del factor de escala), y pasar al régimen WKB para dar una estimación aproximada de la producción de partículas asociada al proceso de cambio de signatura.

Partiendo de las soluciones de frecuencia positivas y negativas en el régimen lorentziano

$$\varphi_n^{\pm} \simeq \frac{\exp\left[\pm i\omega_n \int_{\tau_0}^{\tau} a^2(\tilde{\tau})\mathrm{d}\tilde{\tau}\right]}{\sqrt{2\omega_n a^2(\tau)}}, \tag{3.4.7}$$

donde $\tau_0$ es el tiempo inicial en el que se fija el estado de vacío, y utilizando la ecuación (3.4.2), uno puede determinar la solución en la región euclídea haciendo la continuación analítica (véase de nuevo [138]). Si hacemos corresponder $\tau_0$ en la región euclídea con el punto en el cual hemos fijado el estado inicial del vacío, tendremos que $|\tau_0| > |\tau|$ en esta región. Hacemos notar que $|\tau|$ decrece a medida que nos acercamos a la hipersuperficie del cambio de signatura (esto es, cuando $\tau = 0$).

Entonces, utilizando las soluciones WKB para el campo y su primera derivada en ambos lados de la hipersuperficie, y tomando aproximadamente el límite $\tau \to 0$, podemos calcular los elementos $I_n^{(rs)}$ de la matriz que aparece en (3.4.5), dados por la expresión (3.4.4). De esta forma, obtenemos

$$I_n^{(rs)} = -\frac{e^{r\omega_n\Lambda}}{2}(s + ir), \qquad \Lambda = \int_0^{|\tau_0|} \bar{a}^2(\tilde{\tau})\mathrm{d}\tilde{\tau}. \tag{3.4.8}$$

Aquí $\bar{a}^2$ es la continuación analítica del factor de escala al cuadrado bajo la rotación de Wick y un cambio de orientación del tiempo [$\bar{a}^2(-\tau) = \mathrm{lím}_{\tilde{\tau}\to i\tau}\, a^2(\tilde{\tau})$].

El valor de $c_n^-$ obtenido indica, pues, la existencia de una generación de partículas amplificada por un factor exponencial como consecuencia del cambio de signatura en la métrica del espacio-tiempo. La abundancia de esta producción depende de las características de la región euclídea únicamente a través de la cantidad $\Lambda$.

# Discusión

En esta primera parte, nuestro trabajo se ha centrado en investigar la validez y el rango de aplicabilidad de un criterio recientemente introducido en Teoría Cuántica de Campos en espacio-tiempos curvos para eliminar la ambigüedad existente en la elección de representación de Fock a la hora de cuantizar campos escalares en fondos no estacionarios en cosmología. El criterio consiste en imponer la invariancia bajo el grupo de simetrías espaciales de las ecuaciones de campo y requerir la implementabilidad unitaria de la dinámica. En el primer capítulo, hemos considerado en detalle el caso de un campo de Klein-Gordon con masa variable en el tiempo propagándose sobre un tres-toro, con fondo estático. La importancia de este sistema se debe a que puede entenderse como un campo de Klein-Gordon reescalado en un espacio-tiempo de FLRW plano con secciones compactas, de topología toroidal. Hemos demostrado que la representación de Fock asociada de forma natural al caso sin masa permite una cuantización invariante y con evolución unitaria. Tras caracterizar todas las estructuras complejas invariantes, hemos probado que aquéllas que permiten una evolución unitaria son (unitariamente) equivalentes a la del caso sin masa, con lo que queda eliminada la ambigüedad física en la cuantización. Además, hemos visto que (en tres dimensiones espaciales) existe un único escalado del campo y una única elección de su momento canónico, de entre todos los relacionados mediante transformaciones canónicas lineales dependientes del tiempo, para los que la invariancia espacial y la unitariedad de la dinámica son posibles. De esta forma, nuestro criterio elimina también la ambigüedad en la elección del par canónico asociada a transformaciones variables en el tiempo del tipo mencionado. Los resultados en realidad extensibles a topologías espaciales generales [106, 107], distintas de las del tres-toro, aunque el caso de topología plana merece por sí solo un estudio pormenorizado y cuidadoso, tanto por las peculiaridades del grupo de simetrías espaciales como por la relevancia de sus aplicaciones físicas.

Hemos puesto de relieve que la unitariedad de la evolución es independiente de cualquier reparametrización temporal que se introduzca en nuestro sistema. Empleando esta propiedad y el reescalado del campo por funciones dependientes del tiempo, hemos extendido el ámbito de aplicación de nuestro criterio a todas las ecuaciones de evolución de segundo orden en el tiempo para campos escalares en las que la dependencia espacial aparezca reflejada únicamente mediante un término proporcional al operador de Laplace-Beltrami. Cualquier ecuación de este tipo puede llevarse a una forma de Klein-Gordon sobre un fondo estático pero con masa dependiente en el tiempo mediante un reescalado del campo y una elección adecuada del tiempo. Es más, tanto el reescalado como la selección del tiempo están determinados de forma unívoca. La única condición necesaria (a parte de ciertos requisitos de diferenciabilidad en los coeficientes dependientes del tiempo de la ecuación de campo) es que el coeficiente del término de Laplace-Beltrami sea una función temporal de signo definido (positivo si la ecuación de evolución ha de ser hiperbólica).

Nuestras conclusiones rebaten algunas afirmaciones que han aparecido en la literatura sobre cuantización de campos en espacio-tiempos cosmológicos, por ejemplo sobre la evolución cuántica de un campo escalar sobre un espacio-tiempo de De Sitter. Así, en la referencia [143] se había asegurado que, para este campo, es imposible que la transformación canónica correspondiente a la evolución temporal pueda ser implementada de manera unitaria en una cuantización de Fock alcanzada bajo un reescalado del campo. En este caso, la ecuación de campo incluye un término que va con la primera derivada respecto al tiempo, y otro término con una función temporal que multiplica al laplaciano. En el análisis de [143], los autores trabajan con el tiempo propio e introducen un reescalado genérico del campo variable en el tiempo. El error reside en su elección de momento canónicamente conjugado, que fijan indebidamente en vez de permitir la expresión más general compatible con la linealidad. En realidad, escalando el campo original con el factor conforme y permitiendo que el momento cánonico conjugado tenga un término que dependa linealmente del campo es posible pasar a una descripción en tiempo conforme en la que recuperamos la ecuación (2.2.1) y, por lo tanto, se puede implementar la dinámica unitariamente.

También hemos mostrado que cualquiera de las ecuaciones de evolución consideradas puede interpretarse como una ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar con masa variable en un espacio-tiempo conformemente ultraestático. La elección de lapso y el factor de escala determinan, de nuevo de forma biunívoca, los coeficientes de la primera derivada temporal del campo y del término de Laplace-Beltrami en la ecuación diferencial. Si el coeficiente del término de Laplace-Beltrami se hace negativo, la ecuación puede entenderse como una ecuación elíptica en una región espacio-temporal euclídea. Por lo tanto, el cambio de signo en este coeficiente corresponde a un cambio desde una región lorentziana a una euclídea, y con ello a un cambio de signatura. No obstante, hemos demostrado que, cuando ocurre este cambio, la métrica espacio-temporal degenera totalmente. El cambio corresponde a una singularidad donde divergen los invariantes de curvatura. Es más, hemos mostrado que las variables de Ashtekar no están bien definidas en el límite asociado a este cambio de signatura. En él se pierde cualquier interpretación espacio-temporal, y la descripción clásica en función de las variables fundamentales de la LQG deja de tener sentido.

Por último, hemos estudiado cómo traducir condiciones sobre el estado de vacío de la teoría impuestas en la región de comportamiento euclídeo a condiciones en el régimen lorentziano. Para ello, hemos definido modos de frecuencia positiva y negativa y los hemos continuado analíticamente a la zona euclídea mediante una rotación de Wick. Hemos impuesto condiciones de continuidad del campo de Klein-Gordon y de su derivada en el cambio de signatura. De esta forma, hemos obtenido los coeficientes del desarrollo en modos del vacío en la región lorentziana a partir de los correspondientes a la región euclídea. Con este resultado, hemos podido mostrar que existe un fenómeno análogo a la creación de partículas en el vacío. Finalmente, hemos realizado un estudio en aproximación WKB, que pone de manifiesto una producción de partículas amplificada exponencialmente. Todos estos resultados tienen un campo de aplicación inmediato en la LQC, en la que se ha venido barajando recientemente la posibilidad de que las ecuaciones efectivas incluyan un cambio de signatura como el aquí analizado. Fenómenos similares se han investigado también en condensados de Bose-Einstein [110].

# Parte II

# Perturbaciones cosmológicas

# 4

# Perturbaciones en Cosmología Cuántica de Lazos Híbrida: variables de Mukhanov-Sasaki

## 4.1. Introducción

El éxito de los modelos inflacionarios propuestos de forma independiente y casi simultánea por A. Starobinsky [144] y A. Guth [145] generó un mayor interés en el tratamiento de perturbaciones lineales en cosmología, y dio lugar a un gran número de contribuciones en este campo [137, 146–152]. Matemáticamente, la descripción de pequeñas perturbaciones en Relatividad General se complica debido a la libertad de gauge inherente a la teoría, que afecta a la representación de las perturbaciones. Esta libertad en la elección de la correspondencia entre el espacio-tiempo físico inhomogéneo y el ficticio que se utiliza de fondo ha despertado fuertes controversias por la dificultad en reconocer las coordenadas de tipo gauge a la hora de extraer los verdaderos grados de libertad físicos del sistema.

En el presente capítulo, vamos a estudiar perturbaciones escalares en el marco de Cosmología Cuántica de Lazos. El trabajo que aquí se presenta es la continuación de un proyecto que se ha venido desarrollando en los últimos años [58–60]. En la búsqueda de una descripción libre de las ambigüedades de gauge que hemos mencionado, a continuación, definiremos las denominadas variables de Mukhanov-Sasaki para describir las inhomogeneidades. Estas variables, invariantes de gauge, fueron propuestas por V. Mukhanov, basándose en las investigaciones de M. Sasaki [148], para el caso de un campo escalar sobre un fondo homogéneo e isótropo espacialmente plano [151]. Mukhanov expandió la acción para el campo gravitatorio y el escalar hasta segundo orden en perturbaciones e introdujo un campo de invariante de gauge que caracterizaba perfectamente las perturbaciones y permitía reescribir la acción exclusivamente en términos de éste. Estas variables gozan hoy en día de gran popularidad gracias a la sencillez de sus ecuaciones dinámicas y su relación directa con las perturbaciones de curvatura comóviles.

Para la construcción del formalismo canónico y la ligadura Hamiltoniana del sistema, esencialmente, adaptaremos el tratamiento de J. J. Halliwell y S. W. Hawking [150] para el caso plano con secciones espaciales compactas. Tras la expansión en modos de las variables ADM (de las iniciales de R. Arnowitt, S. Deser y C.W. Misner [88]) de la métrica y del campo escalar utilizando las simetrías espaciales, procederemos a la cuantización del modelo. La estrategia consistirá en dividir el espacio de fases en dos sectores: el homogéneo, que incorpora los modos cero, y el inhomogéneo, que incluye el resto de modos, presentes en las perturbaciones. Esto nos permitirá luego combinar dos cuantizaciones diferentes, una para cada sector. Aquí, emplearemos los métodos de Cosmología Cuántica de Lazos que describimos en la Introducción para el sector homogéneo y una representación de Fock para las perturbaciones. Este procedimiento híbrido se basa en la idea de que los efectos de la geometría cuántica más relevantes son aquéllos que atañen a los grados de libertad homogéneos de la geometría, mientras que las perturbaciones se pueden describir siguiendo un tratamiento más estándar. En principio, parece natural asumir que existe un régimen de la dinámica cuántica que se encuentra a medio camino entre la teoría fundamental de Gravedad Cuántica y una Teoría Cuántica de Campos en espacio-tiempos curvos (donde se interpretaría a las perturbaciones como simples campos de prueba propagándose sobre una geometría dada).

En suma, el propósito de este trabajo es ofrecer una descripción cuántica consistente de la evolución de las perturbaciones cosmológicas en el Universo, libre de la singularidad inicial que aparece en la teoría de Einstein, e investigar la posibilidad de encontrar información sobre la naturaleza cuántica de la geometría del espacio-tiempo en las fluctuaciones cuánticas del Universo primordial.

## 4.2. Descripción clásica del sistema

Estudiamos perturbaciones inhomogéneas sobre un espacio-tiempo de FLRW con secciones espaciales compactas y un contenido material dado por un campo escalar mínimamente acoplado. En particular, vamos a considerar un campo sujeto a un potencial cuadrático dado por un término de masa. Sin embargo, la extensión de nuestro estudio a un potencial genérico es directa. Vamos a tratar únicamente con perturbaciones escalares. Esta hipótesis es completamente consistente, ya que éstas se desacoplan (al orden perturbativo de truncamiento que analizamos) de las perturbaciones vectoriales y las tensoriales. En realidad, el estudio de los grados de libertad físicos incluidos en las perturbaciones tensoriales se puede hacer de una forma similar y es incluso más simple desde el punto de vista técnico, dado que se pueden describir directamente mediante invariantes de gauge sin mezclar las perturbaciones del campo y de la métrica. Por otro lado, las perturbaciones vectoriales no contienen grados de libertad físicos si el contenido material es un campo escalar.

### 4.2.1. Modelo de FLRW perturbado

Partiendo de una exfoliación global del espacio-tiempo, adoptamos una descomposición $3+1$ de la métrica Lorentziana en la forma ADM, parametrizada en términos de la tres-métrica $h_{ij}$ inducida sobre las secciones espaciales de tiempo constante $t$, la función lapso $N$, y el vector desplazamiento $N^i$. Los índices $i$, $j$ toman valores enteros entre el 1 y el 3. En un espacio-tiempo de FLRW, gracias a la homogeneidad y a la isotropía, estas funciones métricas quedan totalmente caracterizadas mediante la función lapso homogénea $N_0(t)$, el logaritmo del factor de escala $\alpha(t)$, y una tres-métrica auxiliar estática ${}^0h_{ij}$. En el caso plano y compacto, ésta última corresponde a la métrica plana del tres-toro $\ ^3$. Vamos a escoger coordenadas angulares $\ _i$ en cada una de las direcciones ortonormales, con período igual a $l_0$, tal que $2\ \ _i/l_0 \in S^1$. Además, incluiremos en este modelo un campo escalar $\phi$ mínimamente acoplado, que posea las mismas simetrías que la geometría.

Para estudiar perturbaciones escalares en este sistema, construimos el espacio de Hilbert de funciones de cuadrado integrable sobre las secciones espaciales con respecto al elemento de volumen, que definimos utilizando la métrica fiducial ${}^0h_{ij}$ (o el elemento de línea ${}^0h_{ij}d\ \ _i d\ \ _j$), e introducimos en dicho espacio el operador de Laplace-Beltrami compatible con la métrica. Los autovalores de este operador proporcionan una base para el espacio de Hilbert de funciones, de manera que, cualquier función puede ser reescrita como una expansión en modos. En particular, podemos expandir las perturbaciones inhomogéneas que vamos a estudiar. Así pues, en lugar de estudiar la dependencia espacial, pasamos a hacer un análisis espectral en términos de estos modos.

En el caso del tres-toro, adoptamos una base real de modos de Fourier dados por las funciones seno y coseno, a saber

$$Q_{\vec{n},+}(\vec{\ }) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{2}{l_0}\vec{n}\cdot\vec{\ }\right), \quad Q_{\vec{n},-}(\vec{\ }) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{l_0}\vec{n}\cdot\vec{\ }\right), \tag{4.2.1}$$

donde $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3$ es una terna cuya primera componente es estrictamente positiva (para evitar repeticiones de modos). Además, $\vec{n}\cdot\vec{\ } = \sum_i n_i\ \ _i$. Estos modos tienen una norma igual a la raíz cuadrada del volumen auxiliar $l_0^3$ del tres-toro, y sus autovalores de Laplace-Beltrami son $-\omega_n^2 = -4\ \ ^2\vec{n}\cdot\vec{n}/l_0^2$.

En la expansión de las inhomogeneidades, el valor $\vec{n} = 0$ está excluido, puesto que, tal y como veremos a continuación, el modo cero dará cuenta de las variables homogéneas de la métrica y del campo. Estos grados de libertad serán tratados de manera exacta al orden perturbativo de nuestro truncamiento en la descripción del sistema. Con todo esto, y utilizando el desarrollo en serie de Fourier, la métrica puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} h_{ij}(t, \vec{\ }) &= \sigma^2 e^{2\alpha(t)}\, {}^0h_{ij}(\vec{\ }) \left[1 + 2\sum_{\vec{n},\epsilon} a_{\vec{n},\epsilon}(t) Q_{\vec{n},\epsilon}(\vec{\ })\right] \\ &+ 6\sigma^2 e^{2\alpha(t)} \sum_{\vec{n},\epsilon} b_{\vec{n},\epsilon}(t) \left[\frac{1}{\omega_n^2}(Q_{\vec{n},\epsilon})_{|ij}(\vec{\ }) + \frac{1}{3}\,{}^0h_{ij}(\vec{\ }) Q_{\vec{n},\epsilon}(\vec{\ })\right], \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

$$N(t, \vec{\ }) = \sigma N_0(t) \left[1 + \sum_{\vec{n},\epsilon} g_{\vec{n},\epsilon}(t) Q_{\vec{n},\epsilon}(\vec{\ })\right], \tag{4.2.3}$$

$$N_i(t, \vec{\ }) = \sigma^2 e^{\alpha(t)} \sum_{\vec{n},\epsilon} \frac{1}{\omega_n^2} k_{\vec{n},\epsilon}(t) (Q_{\vec{n},\epsilon})_{|i}(\vec{\ }), \tag{4.2.4}$$

y el campo escalar tal que

$$\Phi(t, \vec{\ }) = \frac{1}{\sigma\sqrt{l_0^3}} \left[\varphi(t) + \sum_{\vec{n},\epsilon} f_{\vec{n},\epsilon}(t) Q_{\vec{n},\epsilon}(\vec{\ })\right]. \tag{4.2.5}$$

Aquí, $\sigma^2 = 4\ \ G/(3l_0^3)$, la barra vertical indica la derivada covariante respecto a la métrica auxiliar, y $\epsilon = +, -$ (para los modos coseno y seno, respectivamente). La variable $\varphi$ proporciona la parte homogénea del campo. Las perturbaciones escalares de la geometría y la componente material quedan, pues, parametrizadas mediante las funciones

$$\{a_{\vec{n},\epsilon}(t), b_{\vec{n},\epsilon}(t), g_{\vec{n},\epsilon}(t), k_{\vec{n},\epsilon}(t), f_{\vec{n},\epsilon}(t)\}. \tag{4.2.6}$$

A partir de ahora omitiremos la dependencia temporal de estos coeficientes para simplificar la notación.

Substituyendo estas expresiones en el hamiltoniano de la acción gravitatoria acoplada a un campo escalar, y truncando el resultado a segundo orden perturbativo, obtenemos (a parte del término de Legendre que contiene la información sobre la estructura simpléctica del sistema) un hamiltoniano total $H$ formado por una combinación lineal de ligaduras:

$$H = N_0\Big[H_{|0} + \sum_{\vec{n},\epsilon} H_{|2}^{\vec{n},\epsilon}\Big] + \sum_{\vec{n},\epsilon} N_0 g_{\vec{n},\epsilon} H_{|1}^{\vec{n},\epsilon} + \sum_{\vec{n},\epsilon} k_{\vec{n},\epsilon} H_{\_1}^{\vec{n},\epsilon}. \tag{4.2.7}$$

Llamamos $H_{|0}$ a la ligadura Hamiltoniana o escalar del modelo de FLRW sin perturbar:

$$H_{|0} = \frac{e^{-3\alpha}}{2}\big(-\ {}^2_\alpha + \ {}^2_\varphi + e^{6\alpha}\tilde{m}^2\varphi^2\big). \tag{4.2.8}$$

La constante $\tilde{m}$ está relacionada con la masa $m$ del campo escalar a través de $\tilde{m} = m\sigma$, y de manera genérica hemos llamado al momento conjugado de la variable . Como puede verse en (4.2.7), el modo cero de la ligadura hamiltoniana contiene correcciones de las inhomogeneidades que son de segundo orden, y que hemos expresado como una suma en modos de los términos $H^{\vec{n},\epsilon}_{|2}$. Por otro lado, $H^{\vec{n},\epsilon}_{|1}$ y $H^{\vec{n},\epsilon}_{\_1}$ son lineales en las inhomogeneidades, y surgen de la perturbación de las ligaduras hamiltoniana y de momento, respectivamente. Concretamente, las expresiones explícitas de estos términos son

$$\begin{aligned} H^{\vec{n},\epsilon}_{|2} = \frac{e^{-3\alpha}}{2}\Big\{ & - {}^{2}_{a_{\vec{n},\epsilon}} + {}^{2}_{b_{\vec{n},\epsilon}} + {}^{2}_{f_{\vec{n},\epsilon}} + 2\, {}_{\alpha}(a_{\vec{n},\epsilon}\ {}_{a_{\vec{n},\epsilon}} + 4b_{\vec{n},\epsilon}\ {}_{b_{\vec{n},\epsilon}}) - 6\, {}_{\varphi} a_{\vec{n},\epsilon}\ {}_{f_{\vec{n},\epsilon}} \\ & + {}^{2}_{\alpha}\left(\tfrac{1}{2}a^2_{\vec{n},\epsilon} + 10b^2_{\vec{n},\epsilon}\right) + {}^{2}_{\varphi}\left(\tfrac{15}{2}a^2_{\vec{n},\epsilon} + 6b^2_{\vec{n},\epsilon}\right) \\ & - e^{4\alpha}\left(\tfrac{1}{3}\omega_n^2 a^2_{\vec{n},\epsilon} + \tfrac{1}{3}\omega_n^2 b^2_{\vec{n},\epsilon} + \tfrac{2}{3}\omega_n^2 a_{\vec{n},\epsilon} b_{\vec{n},\epsilon} - \omega_n^2 f^2_{\vec{n},\epsilon}\right) \\ & + e^{6\alpha}\tilde{m}^2\Big[3\varphi^2\left(\tfrac{1}{2}a^2_{\vec{n},\epsilon} - 2b^2_{\vec{n},\epsilon}\right) + 6\varphi a_{\vec{n},\epsilon} f_{\vec{n},\epsilon} + f^2_{\vec{n},\epsilon}\Big]\Big\}, \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

$$\begin{aligned} H^{\vec{n},\epsilon}_{|1} = \frac{e^{-3\alpha}}{2}\Big[ & -2\ {}_{\alpha}\ {}_{a_{\vec{n},\epsilon}} + 2\ {}_{\varphi}\ {}_{f_{\vec{n},\epsilon}} - (\ {}^{2}_{\alpha} + 3\ {}^{2}_{\varphi})a_{\vec{n},\epsilon} - \tfrac{2}{3}\omega_n^2 e^{4\alpha}(a_{\vec{n},\epsilon} + b_{\vec{n},\epsilon}) \\ & + e^{6\alpha}\tilde{m}^2\varphi(3\varphi a_{\vec{n},\epsilon} + 2f_{\vec{n},\epsilon})\Big], \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

$$H^{\vec{n},\epsilon}_{\_1} = \frac{e^{-\alpha}}{3}\big[ -\ {}_{a_{\vec{n},\epsilon}} + {}_{b_{\vec{n},\epsilon}} + {}_{\alpha}(a_{\vec{n},\epsilon} + 4b_{\vec{n},\epsilon}) + 3\ {}_{\varphi} f_{\vec{n},\epsilon}\big]. \tag{4.2.11}$$

Nótese que $g_{\vec{n},\epsilon}$ y $k_{\vec{n},\epsilon}$ no representan grados de libertad físicos sino que, más bien, actúan como multiplicadores de Lagrange asociados a las ligaduras perturbativas lineales. Además, debemos remarcar el hecho de que, al orden de truncamiento en la acción que hemos adoptado, el sistema perturbado es simpléctico y queda totalmente caracterizado por las variables canónicas $\alpha$ y $\varphi$ para los modos cero, los coeficientes de Fourier $\{X^{\vec{n},\epsilon}_{l}\} := \{a_{\vec{n},\epsilon}, b_{\vec{n},\epsilon}, f_{\vec{n},\epsilon}\}$ ($l = 1, 2, 3$), y sus momentos conjugados correspondientes.

## 4.2.2. Fijación de gauge

La presencia de ligaduras en el sistema pone de manifiesto la necesidad de introducir condiciones adicionales que fijen la libertad de gauge intrínseca al modelo perturbado y que aparece a través de nuevos grados de libertad no físicos.

En esta sección, vamos a fijar el gauge clásicamente para obtener el modelo reducido donde sólo están los verdaderos grados de libertad del sistema, y a partir del cual reformularemos nuestra descripción para el espacio de fases en términos de invariantes de gauge. Siguiendo estos pasos, tratamos de eliminar el rastro de cualquier dependencia en la elección de gauge. Asumimos aquí que la fijación de gauge y la reformulación de las perturbaciones en términos de invariantes de gauge son procesos que conmutan, es decir, que no importa el orden en que se ejecuten. Como veremos, la elección de fijación de gauge que hacemos simplificará el análisis considerablemente y, además, resultará ser la más conveniente para comparar nuestra propuesta de cuantización híbrida con otros trabajos que se han hecho en LQC para perturbaciones cosmológicas [62, 63].

En particular, adoptamos un gauge longitudinal, caracterizado por las condiciones

$$b_{\vec{n},\epsilon} = 0, \qquad {}_{a_{\vec{n},\epsilon}} - {}_{\alpha} a_{\vec{n},\epsilon} - 3 \; {}_{\varphi} f_{\vec{n},\epsilon} = 0 \tag{4.2.12}$$

para cada modo. Esencialmente, estas restricciones adicionales eliminan la libertad de gauge asociada a las ligaduras perturbativas lineales. Además, en este gauge, el vector desplazamiento se anula y la métrica espacial es conformemente plana. El sistema reducido que obtenemos admite también una estructura simpléctica, inducida a partir de la original, a segundo orden perturbativo, dando lugar al siguiente conjunto de variables canónicas para describir el espacio de fases

$$\bar{f}_{\vec{n},\epsilon} = e^{\alpha} f_{\vec{n},\epsilon}, \tag{4.2.13a}$$

$${}_{\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}} = e^{-\alpha}\big( {}_{f_{\vec{n},\epsilon}} - 3 \; {}_{\varphi} a_{\vec{n},\epsilon} - {}_{\alpha} f_{\vec{n},\epsilon}\big), \tag{4.2.13b}$$

$$\bar{\alpha} = \alpha + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n},\epsilon} \left( a^2_{\vec{n},\epsilon} + f^2_{\vec{n},\epsilon} \right), \tag{4.2.13c}$$

$${}_{\bar{\alpha}} = {}_{\alpha} + \sum_{\vec{n},\epsilon} \left( {}_{\alpha} f^2_{\vec{n},\epsilon} + 3 \; {}_{\varphi} a_{\vec{n},\epsilon} f_{\vec{n},\epsilon} - f_{\vec{n},\epsilon} \; {}_{f_{\vec{n},\epsilon}} \right), \tag{4.2.13d}$$

$$\bar{\varphi} = \varphi + 3 \sum_{\vec{n},\epsilon} a_{\vec{n},\epsilon} f_{\vec{n},\epsilon}, \tag{4.2.13e}$$

$${}_{\bar{\varphi}} = {}_{\varphi}, \tag{4.2.13f}$$

donde

$$a_{\vec{n},\epsilon} = 3 \frac{{}_{\varphi} \; {}_{f_{\vec{n},\epsilon}} + \left( e^{6\alpha} \tilde{m}^2 \varphi - 3 \; {}_{\alpha} \; {}_{\varphi} \right) f_{\vec{n},\epsilon}}{9 \; {}^{2}_{\varphi} + \omega_n^2 e^{4\alpha}}. \tag{4.2.14}$$

Como se puede apreciar, las nuevas variables barradas asociadas a los grados de libertad homogéneos incorporan términos cuadráticos en las inhomogeneidades, para conservar la forma canónica del sistema simpléctico. Si uno expresara la métrica en términos de estas nuevas variables, la parte de modo cero de la métrica adquiriría una contribución cuadrática en las perturbaciones, cuya forma explícita dependería, no obstante, de las perturbaciones lineales en los modos inhomogéneos de una manera totalmente determinada.

La única ligadura que sobrevive es la Hamiltoniana, $H = N_0[H_{|0} + \sum_{\vec{n},\epsilon} H^{\vec{n},\epsilon}_{|2}]$, donde $H_{|0}$ viene dada por la ecuación (4.2.8), evaluada ahora en las variables homólogas con barra. Las nuevas contribuciones cuadráticas de los modos inhomogéneos son

$$H^{\vec{n},\epsilon}_{|2} = \frac{e^{-\alpha}}{2} \left[ E^{n}_{--} \; {}^{2}_{\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}} + 2 E^{n}_{\bar{f}-} \bar{f}_{\vec{n},\epsilon} \; {}_{\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}} + E^{n}_{\bar{f}\bar{f}} \bar{f}^2_{\vec{n},\epsilon} \right], \tag{4.2.15}$$

con los coeficientes

$$E^{n}_{--} = 1 - \frac{3}{\omega_n^2} e^{-4\bar{\alpha}} \;{}^{2}_{\bar{\varphi}}, \tag{4.2.16a}$$

$$E^{n}_{\bar{f}-} = -\frac{3}{\omega_n^2} e^{-6\bar{\alpha}} \;{}_{\bar{\varphi}}\big(e^{6\bar{\alpha}}\tilde{m}^2\bar{\varphi} - 2 \;{}_{\bar{\alpha}}\;{}_{\bar{\varphi}}\big), \tag{4.2.16b}$$

$$E^{n}_{\bar{f}\bar{f}} = \omega_n^2 + \tilde{m}^2 e^{2\bar{\alpha}} - \frac{1}{2} e^{-4\bar{\alpha}}\big(\;{}^{2}_{\bar{\alpha}} + 15\;{}^{2}_{\bar{\varphi}} + 3e^{6\bar{\alpha}}\tilde{m}^2\bar{\varphi}^2\big) \tag{4.2.16c}$$

$$- \frac{3}{\omega_n^2} e^{-8\bar{\alpha}}\big(e^{6\bar{\alpha}}\tilde{m}^2\bar{\varphi} - 2\;{}_{\bar{\alpha}}\;{}_{\bar{\varphi}}\big)^2. \tag{4.2.16d}$$

Hay que tener en cuenta que estos nuevos términos incorporan las contribuciones que producen las correcciones cuadráticas de las variables homogéneas en el término de orden cero.

### 4.2.3. Reformulación en términos de las variables de Mukhanov-Sasaki

Para concluir esta sección, vamos a relacionar las variables canónicas $(\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}, \;{}_{\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}})$ para los modos inhomogéneos del campo escalar con los invariantes de gauge de MS. A fin de conservar la estructura simpléctica del espacio de fases clásico, volveremos a transformar las variables homogéneas. Y calcularemos las nuevas ligaduras del sistema en esta nueva formulación invariante de gauge.

#### Espacio de fases

En cualquier gauge, los coeficientes de la variable de configuración de MS son

$$v_{\vec{n},\epsilon} = e^{\alpha}\left[f_{\vec{n},\epsilon} + \frac{\;{}_{\varphi}}{\;{}_{\alpha}}(a_{\vec{n},\epsilon} + b_{\vec{n},\epsilon})\right]. \tag{4.2.17}$$

Particularizando esta expresión a nuestro gauge longitudinal, e introduciendo un momento conjugado, obtenemos el par de modos

$$v_{\vec{n},\epsilon} = A_n\bar{f}_{\vec{n},\epsilon} + B_n \;{}_{\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}}, \tag{4.2.18a}$$

$${}_{v_{\vec{n},\epsilon}} = C_n\bar{f}_{\vec{n},\epsilon} + D_n \;{}_{\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}}, \tag{4.2.18b}$$

donde

$$A_n = 1 + \frac{3}{\omega_n^2} e^{-4\bar{\alpha}} \frac{\;{}_{\bar{\varphi}}}{\;{}_{\bar{\alpha}}}\big(e^{6\bar{\alpha}}\tilde{m}^2\bar{\varphi} - 2\;{}_{\bar{\alpha}}\;{}_{\bar{\varphi}}\big), \tag{4.2.19a}$$

$$B_n = \frac{3}{\omega_n^2} e^{-2\bar{\alpha}} \frac{\;{}^{2}_{\bar{\varphi}}}{\;{}_{\bar{\alpha}}}, \tag{4.2.19b}$$

$$
\begin{aligned}
C_n = & -3e^{-2\bar{\alpha}}\frac{{}^{2}_{\bar{\varphi}}}{{}_{\bar{\alpha}}} - \frac{3}{\omega_n^2}e^{-6\bar{\alpha}}\frac{1}{{}_{\bar{\alpha}}}\left[e^{12\bar{\alpha}}\tilde{m}^4\bar{\varphi}^2 + 2\ {}^{2}_{\bar{\varphi}}\big(2\ {}^{2}_{\bar{\alpha}} - 3\ {}^{2}_{\bar{\varphi}}\big)\right] \\
& + \frac{3}{\omega_n^2}\tilde{m}^2\bar{\varphi}\frac{{}_{\bar{\varphi}}}{{}^{2}_{\bar{\alpha}}}\big(4\ {}^{2}_{\bar{\alpha}} - 3\ {}^{2}_{\bar{\varphi}}\big), \qquad (4.2.19c)
\end{aligned}
$$

$$
D_n = 1 - \frac{3}{\omega_n^2}e^{-4\bar{\alpha}}\frac{{}_{\bar{\varphi}}}{{}_{\bar{\alpha}}}\left[e^{6\bar{\alpha}}\tilde{m}^2\bar{\varphi} - \frac{{}_{\bar{\varphi}}}{{}_{\bar{\alpha}}}\big(2\ {}^{2}_{\bar{\alpha}} - 3\ {}^{2}_{\bar{\varphi}}\big)\right]. \qquad (4.2.19d)
$$

Llegados a este punto, cabe comentar que la expresión del momento de MS dado aquí generaliza la que se dio en la referencia [59], en el sentido de que ambas coinciden únicamente cuando se impone la ligadura clásica $H$, o, al orden perturbativo considerado, la ligadura $H_{|0}$ en las expresiones de los coeficientes $C_n$ y $D_n$ como funciones de las variables homogéneas.

Las relaciones expuestas entre los pares de MS $(v_{\vec{n},\epsilon},\ {}_{v_{\vec{n},\epsilon}})$ y las variables $(\bar{f}_{\vec{n},\epsilon},\ {}_{\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}})$ forman una transformación canónica, considerando las variables homogéneas como fijas. Es fácil comprobar que $A_nD_n - B_nC_n = 1$ para todos los posibles valores de $n$. En realidad, es posible demostrar que dicha transformación (con el sector homogéneo fijo) puede ser implementada de manera unitaria en la representación de Fock seleccionada por la elección de variables de creación y aniquilación que uno podría construir de manera natural a partir de $(\bar{f}_{\vec{n},\epsilon},\ {}_{\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}})$ despreciando el término de masa del campo escalar.

Utilizando dicha propiedad, es sencillo obtener la inversa dada por

$$
\bar{f}_{\vec{n},\epsilon} = D_n v_{\vec{n},\epsilon} - B_n\ {}_{v_{\vec{n},\epsilon}}, \qquad (4.2.20a)
$$

$$
{}_{\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}} = -C_n v_{\vec{n},\epsilon} + A_n\ {}_{v_{\vec{n},\epsilon}}. \qquad (4.2.20b)
$$

Nuestro cometido ahora es completar esta relación en una trasformación canónica en el espacio de fases reducido de nuestro sistema, truncado a segundo orden perturbativo en la acción.

Vamos a llamar $\{\bar{\varpi}^a\} := \{\bar{\alpha}, \bar{\varphi}\}$ (con $a = 1, 2$), esto es, las variables de configuración homogéneas barradas, y $\{\bar{\varpi}^a_p\}$ a sus momentos canónicos conjugados. Un sencillo cálculo, realizando integración por partes, muestra que, salvo integrales temporales de derivadas totales e ignorando en la acción contribuciones de las perturbaciones cúbicas o de orden superior, el término de Legendre que contiene la información sobre la estructura simpléctica puede ser reescrito de la forma

$$
\int dt\Big[\sum_a \dot{\bar{\varpi}}^a\bar{\varpi}^a_p + \sum_{\vec{n},\epsilon}\dot{\bar{f}}_{\vec{n},\epsilon}\ {}_{\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}}\Big] = \int dt\Big[\sum_a \dot{\tilde{\varpi}}^a\tilde{\varpi}^a_p + \sum_{\vec{n},\epsilon}\dot{v}_{\vec{n},\epsilon}\ {}_{v_{\vec{n},\epsilon}}\Big], \qquad (4.2.21)
$$

donde

$$
\tilde{\varpi}^a = \bar{\varpi}^a + \frac{1}{2}\sum_{\vec{n},\epsilon}\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}\left(\partial_{\bar{\varpi}^a_p}\ {}_{\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}}\right) - \frac{1}{2}\sum_{\vec{n},\epsilon}\left(\partial_{\bar{\varpi}^a_p}\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}\right)\ {}_{\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}}, \qquad (4.2.22a)
$$

$$\tilde{\varpi}^a_p = \bar{\varpi}^a_p - \frac{1}{2}\sum_{\vec{n},\epsilon} \bar{f}_{\vec{n},\epsilon}\left(\partial_{\bar{\varpi}^a}\ \ {}_{\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{\vec{n},\epsilon}\left(\partial_{\bar{\varpi}^a}\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}\right)\ \ {}_{\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}}. \tag{4.2.22b}$$

En estas expresiones, las derivadas parciales se toman teniendo en cuenta que $(\bar{f}_{\vec{n},\epsilon},\ \ {}_{\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}})$ son funciones del correspondiente par de modos de MS, de $\bar{\varpi}^a$, y de $\bar{\varpi}^a_p$, dadas por las relaciones (4.2.20).

A partir de este resultado, se deduce de manera inmediata que el conjunto formado por las nuevas variables homogéneas $\{\tilde{\varpi}^a\} := \{\tilde{\alpha}, \tilde{\varphi};\ \ {}_{\tilde{\alpha}},\ \ {}_{\tilde{\varphi}}\}$ y los pares de MS $(\upsilon_{\vec{n},\epsilon},\ \ {}_{\upsilon_{\vec{n},\epsilon}})$ es un conjunto canónico en el espacio de fases del sistema a nuestro orden de truncamiento. Dicho en otras palabras, las ecuaciones (4.2.20) y (4.2.22) constituyen una transformación canónica en este espacio de fases, a segundo orden en perturbaciones.

### Ligadura hamiltoniana

Con el propósito de reformular el sistema en términos de estas nuevas variables canónicas, de manera que la física de las inhomogeneidades se describa mediante invariantes de gauge, todavía tenemos que obtener la nueva expresión de la única ligadura presente en el modelo reducido, es decir, la ligadura hamiltoniana de modo cero. Para ello, primero necesitamos escribir la contribución cuadrática $H^{\vec{n},\epsilon}_{|2}$ como una función de las nuevas variables, conservando únicamente términos cuadráticos en los modos inhomogéneos. Esto se puede hacer: i) substituyendo en (4.2.15) y (4.2.16) la expresión de las variables originales $(\bar{f}_{\vec{n},\epsilon},\ \ {}_{\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}})$ en términos de los pares de MS [utilizando la ecuación (4.2.20)], y ii) reemplazando en la expresión resultante las variables homogéneas viejas por las nuevas, ya que su diferencia es cuadrática en las inhomogeneidades y no es significativa al orden perturbativo para $H^{\vec{n},\epsilon}_{|2}$. Además, reescribimos la otra contribución a la ligadura, $H_{|0}$, como una función de las nuevas variables. Recordando que originalmente $H_{|0}$ se evaluaba en las viejas variables homogéneas, y dándonos cuenta de que la diferencia con las nuevas es cuadrática en los modos de MS, podemos concluir directamente (a través de la expansión de $H_{|0}$) que, a dicho orden, la contribución deseada consiste en la evaluación de la ligadura homogénea $H_{|0}$ en las nuevas variables $\{\tilde{\varpi}^a\}$ más un término cuadrático en las perturbaciones que no es sino la variación de $H_{|0}$ entorno a dichas variables homogéneas multiplicado por la variación de éstas causada por nuestro cambio de conjunto canónico. Combinando estos resultados, llegamos a que

$$H = N_0\Big[H_{|0}(\tilde{\varpi}^a) + \tilde{H}_{|2}(\tilde{\varpi}^a, \upsilon_{\vec{n},\epsilon},\ \ {}_{\upsilon_{\vec{n},\epsilon}})\Big], \tag{4.2.23}$$

donde

$$\tilde{H}_{|2} = \sum_{\vec{n},\epsilon}\tilde{H}^{\vec{n},\epsilon}_{|2} = \sum_{b}\left\{[\bar{\varpi}^b - \tilde{\varpi}^b]\partial_{\tilde{\varpi}^b}H_{|0}(\tilde{\varpi}^a) + [\bar{\varpi}^b_p - \tilde{\varpi}^b_p]\partial_{\tilde{\varpi}^b_p}H_{|0}(\tilde{\varpi}^a)\right\}$$

$$+\sum_{\vec{n},\epsilon} H^{\vec{n},\epsilon}_{|2}(\tilde{\omega}^a, \bar{f}_{\vec{n},\epsilon}[\tilde{\omega}^a, v_{\vec{n},\epsilon}, \; {}_{v_{\vec{n},\epsilon}}], \; {}_{\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}}[\tilde{\omega}^a, v_{\vec{n},\epsilon}, \; {}_{v_{\vec{n},\epsilon}}]). \tag{4.2.24}$$

Huelga decir que, en la última expresión, $(\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}, \; {}_{\bar{f}_{\vec{n},\epsilon}})$ vienen dados por las ecuaciones (4.2.20) evaluadas en $\bar{\omega}^a = \tilde{\omega}^a$ y $\bar{\omega}^a_p = \tilde{\omega}^a_p$.

Otra posibilidad para calcular la expresión de $\tilde{H}_{|2}$ sería consideran nuestro cambio de variables para los modos inhomogéneos como una transformación canónica dependiente del tiempo para variables homogéneas dadas, cuya dependencia temporal está dictada a su vez por la contribución homogénea a la ligadura hamiltoniana, $H_{|0}$. Uno puede entonces aplicar las fórmulas usuales para el cambio de hamiltoniano bajo transformaciones canónicas que dependen del tiempo. El resultado sería, finalmente, el mismo que ya hemos obtenido. Esto proporciona una confirmación independiente de los cálculos y una confianza adicional en la consistencia de nuestra discusión.

Un cálculo largo, aunque sencillo, nos lleva pues a la siguiente fórmula para las contribuciones cuadráticas de las variables de MS:

$$\tilde{H}^{\vec{n},\epsilon}_{|2} = \frac{e^{-\tilde{\alpha}}}{2}\left\{ {}^{2}_{v_{\vec{n},\epsilon}} + \left[\omega_n^2 + e^{-4\tilde{\alpha}}\left(19 \, {}^{2}_{\tilde{\varphi}} - 18\frac{{}^{4}_{\tilde{\varphi}}}{{}^{2}_{\tilde{\alpha}}}\right) + \tilde{m}^2 e^{2\tilde{\alpha}}\left(1 - 2\tilde{\varphi}^2 - 12\tilde{\varphi}\frac{{}_{\tilde{\varphi}}}{{}_{\tilde{\alpha}}}\right)\right] v^2_{\vec{n},\epsilon}\right\}. \tag{4.2.25}$$

Para llegar a esta expresión, hemos utilizado que $H_{|0}$ se anula a orden perturbativo cero. Nótese que este hamiltoniano cuadrático para las inhomogeneidades no contiene términos cruzados entre las variables de configuración del campo y su momento. Además, si uno introdujera variables de MS no reescaladas, ${}_{\vec{n},\epsilon} = e^{-\tilde{\alpha}} v_{\vec{n},\epsilon}$, como las que se utilizan en la descripción de las referencias [62, 63], con el momento dado por ${}_{{}_{\vec{n},\epsilon}} = e^{\tilde{\alpha}} \; {}_{v_{\vec{n},\epsilon}} + e^{-\tilde{\alpha}} \; {}_{\tilde{\alpha}} v_{\vec{n},\epsilon}$, y dedujera el hamiltoniano correspondiente (considerando su reescalado como una transformación canónica dependiente del tiempo de los modos inhomogéneos, o bien completándolo como una transformación canónica en el espacio de fases completo del sistema), obtendría el mismo resultado que se muestra en las ecuaciones (2.5), (A3), y (A4) de la mencionada referencia [63] (teniendo en cuenta la elección del lapso y las variables homogéneas que allí se utilizan, y con la suma sobre los modos discretos transformada en una integral para el caso de una topología plana no compacta). Por lo tanto, como esperábamos, la ecuación (4.2.25) es básicamente la contrapartida del hamiltoniano de MS para las variables inhomogéneas reescaladas.

## 4.3. Cuantización híbrida de lazos

A continuación, vamos a presentar los métodos de cuantización para la variedad simpléctica que describe nuestro sistema cosmológico, y para la representación de la ligadura hamiltoniana a la que está sujeta. Los estados físicos se obtendrán como soluciones a esta ligadura, de acuerdo con el programa que propuso Dirac [153]. Como ya hemos mencionado, combinaremos las técnicas poliméricas de la LQG con una representación de Fock, siguiendo el esquema del formalismo híbrido.

En primer lugar, vamos a centrarnos en la cuantización de lazos para las variables homogéneas $\{\tilde{\omega}^a\}$, y para ello, es necesario adaptar la parametrización del sector homogéneo del espacio de fases a la estándar de LQC que detallamos en la Introducción. Como ya sabemos, en un universo homogéneo e isótropo, la conexión de Ashtekar-Barbero y la tríada densitizada quedan parametrizadas mediante las dos variables dinámicas $c$ y $p$ introducidas en la ecuación (1.2.8). Su relación con la variable $\tilde{\alpha}$ y su momento, en ausencia de perturbaciones inhomogéneas, es

$$|p| = l_0^2\sigma^2 e^{2\tilde{\alpha}}, \quad pc = -\gamma l_0^3\sigma^2 \;\;_{\tilde{\alpha}}. \tag{4.3.1}$$

El signo de $p$ determina la orientación de la tríada, pero lo obviamos aquí porque no desempeña un papel importante en nuestra cuantización.

Para las variables homogéneas correspondientes al campo escalar material, adoptamos el siguiente reescalado constante, con el fin de ajustarnos a la literatura existente de LQC:

$$\phi = \frac{\tilde{\varphi}}{l_0^{3/2}\sigma}, \qquad {}_{\phi} = l_0^{3/2}\sigma \;\;_{\tilde{\varphi}}. \tag{4.3.2}$$

Seguiremos la cuantización que presentamos en la sección 1.2.3, basada en lo que se conoce como dinámica mejorada de LQC [27] y en la prescripción MMO [28].

La contribución de los grados de libertad homogéneos para el modo cero de la ligadura hamiltoniana se representa mediante el operador [28, 29, 59]:

$$\hat{H}_{|0} = \frac{\sigma}{2}\widehat{\left[\frac{1}{\ }\right]}^{1/2}\hat{C}_0\widehat{\left[\frac{1}{\ }\right]}^{1/2}, \tag{4.3.3}$$

donde el operador de la inversa del volumen $\widehat{[1/\ \ ]}$ es el cubo del operador regularizado

$$\widehat{\left[\frac{1}{\ }\right]}^{1/3} = \widehat{\left[\frac{1}{\sqrt{|p|}}\right]} = \frac{3}{2(2\ \ \gamma G\sqrt{\Delta})^{1/3}}\widehat{\mathrm{sgn}(v)}|\hat{v}|^{1/3}\left(\hat{N}_{-\bar{\mu}}|\hat{v}|^{1/3}\hat{N}_{\bar{\mu}} - \hat{N}_{\bar{\mu}}|\hat{v}|^{1/3}\hat{N}_{-\bar{\mu}}\right), \tag{4.3.4}$$

que en realidad conmuta con el mismo operador de volumen. Por otro lado,

$$\hat{C}_0 = \hat{\ }^2_{\phi} - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}, \tag{4.3.5}$$

con

$$\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} = \frac{3}{4\ \ G\gamma^2}\hat{\Omega}_0^2 - 2\ \hat{\ }^2 W(\hat{\phi}); \quad W(\hat{\phi}) = \frac{1}{2}m^2\hat{\phi}^2, \tag{4.3.6}$$

Llamamos $W(\phi)$ al potencial del campo escalar, de manera que la discusión se pueda extender sencillamente a situaciones más allá de la contribución de masa que aquí nos ocupa. El operador $\hat{\Omega}_0$, dado en (1.2.22), representa la cantidad clásica $\Omega_0 = pc$ una vez que ésta última ha sido aproximada en términos de holonomías como $2\ \ G\gamma v$ sen $b$.

Vamos a considerar ahora la representación de las contribuciones cuadráticas de las inhomogeneidades al modo cero de la ligadura hamiltoniana. Primero resaltamos que, al orden de truncamiento que hemos adoptado y teniendo en cuenta las ecuaciones (4.3.5) y (4.3.6), podemos substituir el valor de $\ _\phi^2$ en la expresión de $\tilde{H}_{|2}$ por $\mathcal{H}_0^{(2)} = -2\ \ ^2 W(\phi) + 3\Omega_0^2/(4\ \ G\gamma^2)$, representada cuánticamente como $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$. El cambio resultará muy conveniente si uno quiere utilizar $\phi$ como un tiempo interno del sistema. La diferencia que introduce esta substitución es justo de orden cuadrático en perturbaciones ($\ _\phi^2 = \mathcal{H}_0^{(2)}$ hasta términos de orden cuadrático). Por tanto, podemos despreciarla. Puesto que $\ _\phi^2$ es positivo, en realidad, damos un paso más y reemplazamos $\mathcal{H}_0^{(2)}$ por su parte positiva, con el fin de ser rigurosos en la sustitución. A esta parte positiva la llamaremos $\mathcal{H}_0^2$, y $\hat{\mathcal{H}}_0^2$ a su operador, determinado por la proyección de $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$ sobre la parte positiva de su espectro. Asumimos que el operador $\hat{\mathcal{H}}_0^2$ se define de manera tal que es autoadjunto en $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$ para cada valor de $\phi$, siguiendo la línea argumental que aparece en la literatura [20][4]. Entonces, $\tilde{H}_{|2}$ pasa a ser una función lineal del momento $\ _\phi$, que se puede escribir de forma general como

$$\tilde{H}_{|2} = \frac{\sigma}{2}\sum_{\vec{n},\epsilon} C_2^{\vec{n},\epsilon}; \qquad C_2^{\vec{n},\epsilon} = -\Theta_{\text{e}}^{\vec{n},\epsilon} - \Theta_{\text{o}}^{\vec{n},\epsilon}\ \ _\phi. \tag{4.3.7}$$

En nuestro caso, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ ^{2/3}}\Theta_{\text{e}}^{\vec{n},\epsilon} = &-\left\{\frac{4\ \ G}{3\ \ ^{4/3}}\mathcal{H}_0^2\left(19 - 24\ \ G\gamma^2\frac{\mathcal{H}_0^2}{\Omega_0^2}\right) + \ \ ^{2/3}\left[W''(\phi) - \frac{16\ \ G}{3}W(\phi)\right]\right\}\tilde{v}_{\vec{n},\epsilon}^2 \\
&- \tilde{\omega}_n^2\tilde{v}_{\vec{n},\epsilon}^2 - \ \ _{\tilde{v}_{\vec{n},\epsilon}}^2,
\end{aligned} \tag{4.3.8a}$$

$$\frac{1}{\ ^{2/3}}\Theta_{\text{o}}^{\vec{n},\epsilon} = -16\ \ G\gamma\ \ ^{2/3}\frac{W'(\phi)}{\Omega_0}\tilde{v}_{\vec{n},\epsilon}^2. \tag{4.3.8b}$$

El símbolo prima denota la derivada con respecto a $\phi$ en el potencial $W$. También hemos definido $\tilde{\omega}_n = l_0\omega_n$, y hemos reescalado la variable de MS por un número constante, a saber

$$\tilde{v}_{\vec{n},\epsilon} = \frac{v_{\vec{n},\epsilon}}{\sqrt{l_0}}, \qquad \ _{\tilde{v}_{\vec{n},\epsilon}} = \sqrt{l_0}\ \ _{v_{\vec{n},\epsilon}}. \tag{4.3.9}$$

[4]Una prescripción alternativa, que encontraremos especialmente interesante para el orden de factores que se discutirá más tarde en la sección 4.5, identifica $\hat{\mathcal{H}}_0$ con el operador autoadjunto que dicta la evolución en $\phi$ de las soluciones de frecuencia positiva del modelo homogéneo obtenidas mediante la técnica de promedio sobre grupo [63, 154, 155].

Para los factores que dependen aquí de las variables homogéneas, y que se ven afectados en principio por algunas ambigüedades durante el procedimiento de cuantización, introduciremos un orden de factores simétrico, tratando de respetar en la medida de lo posible las asignaciones de las representaciones que se han hecho en la parte de FLRW del sistema. Concretamente, adoptamos las prescripciones siguientes [59]:

i) Para los productos de tipo $f(\phi)\ {}_{\phi}$, donde $f$ es una función arbitraria, tomamos un orden de factores simétricos de la forma $\{f(\hat{\phi})\,\hat{}_{\phi} + \hat{}_{\phi} f(\hat{\phi})\}/2$.

ii) Para los factores del volumen homogéneo, adoptamos una simetrización algebraica, tal que los términos $\ {}^{r} g(cp)$, donde $g$ es una función cualquiera y $r$ un número real, se representan por el operador $\hat{}^{\,r/2}\hat{g}\,\hat{}^{\,r/2}$. Además, el orden de factores algebraico también se escoge simétrico para las potencias de la inversa del volumen.

iii) Para potencias pares de la variable $\Omega_0$, representamos dicha cantidad mediante la misma potencia del operador $\hat{\Omega}_0$, tal y como se hace en FLRW.

iv) Para potencias impares, esto es $\Omega_0^{2k+1}$ con $k$ igual a un número entero, elegimos la representación $|\hat{\Omega}_0|^k \hat{\Lambda}_0 |\hat{\Omega}_0|^k$, donde $|\hat{\Omega}_0|$ es el operador positivo dado por la raíz cuadrada de $\hat{\Omega}_0^2$ y

$$\hat{\Lambda}_0 := \frac{1}{8i\sqrt{\Delta}}\ \hat{}^{\,1/2}[\widehat{\mathrm{sgn}(v)}, \hat{\mathcal{N}}_{4\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-4\bar{\mu}}]_+\ \hat{}^{\,1/2}. \tag{4.3.10}$$

Este operador se define de manera similar al operador $\hat{\Omega}_0$, pero con holonomías de doble paso (esto es, sobre aristas cuya longitud fiducial es doble). Como resultado, el desplazamiento en la etiqueta $v$ que produce su acción es siempre múltiple de cuatro unidades, de manera que deja invariantes las semirredes de superselección $\mathcal{L}_{\varepsilon}^{\pm}$ de la geometría homogénea. Si hubiéramos reemplazado $\hat{\Lambda}_0$ por $\hat{\Omega}_0$, sin doblar la longitud fiducial de las aristas de la holonomía, los desplazamientos habrían sido sólo de dos unidades, y por lo tanto los sectores de superselección de FLRW no se habrían respetado. En realidad, nuestra estrategia sigue un camino paralelo a las elecciones usuales cuando uno representa el parámetro de Hubble para universos FLRW en LQC [29].

Ahora, haciendo uso de los resultados que obtuvimos en la primera parte de esta tesis, adoptamos una representación de Fock para los modos inhomogéneos, en una cuantización que queda seleccionada a partir de los criterios de: i) invariancia del vacío bajo las isometrías espaciales de la ecuación de movimiento, y ii) implementación unitaria de la dinámica en el régimen en que uno recupera una Teoría Cuántica de Campos en espacio-tiempos curvos (para un intervalo finito de tiempo) [78, 79]. Como ya hemos comentado, estos criterios seleccionan el par de variables canónicas que nosotros hemos elegido para la descripción de las perturbaciones inhomogéneas [78] —obviamente salvo reescalados constantes de todas las variables de configuración y el correspondiente reescalado de las de momento. Cualquier otra elección de variables entre aquéllas que estén relacionadas con la nuestra mediante un reescalado que dependa de las variables homogéneas (y que podría depender explícitamente del tiempo), simplemente, no permitiría una evolución unitaria en el régimen que hemos dicho, con independencia de la estructura compleja que se haya escogido para la construcción de la representación de Fock (éste es el caso, por ejemplo, para el par canónico que se utiliza en las referencias [62, 63]). Aunque uno siempre podría renunciar a la unitariedad de la dinámica, esto implica que la representación en imagen de Heisenberg de las inhomogeneidades no sería equivalente a la correspondiente en imagen de Schrödinger. Asimismo, con nuestro criterio no sólo eliminamos la ambigüedad en la separación de la dependencia de los modos del campo en las variables homogéneas e inhomogéneas, sino que, además, aseguramos la implementación unitaria de la evolución y una interpretación cuántica estándar en el sector donde se recupera Teoría Cuántica de Campos en un fondo (efectivo, en general). Aún más, nuestro criterio de invariancia y unitariedad también selecciona una familia de representaciones de Fock que son todas unitariamente equivalentes. Esta familia contiene la representación en la que las variables de creación y aniquilación construidas a partir de los modos están asociadas de manera natural con los osciladores armónicos de frecuencia $\tilde{\omega}_n$, a saber,

$$a_{\tilde{v}_{\vec{n},\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\omega}_n}}(\tilde{\omega}_n \tilde{v}_{\vec{n},\epsilon} + i\pi_{\tilde{v}_{\vec{n},\epsilon}}) \qquad (4.3.11)$$

y sus complejos conjugados como variables de creación.

Cualquier representación invariante bajo las isometrías espaciales que pertenezca a la clase de equivalencia (unitaria) propia de aquélla que queda determinada por estas variables de creación y aniquilación es también válida. Aunque todas estas representaciones son unitariamente equivalentes, en lo que respecta a las funciones del campo en el álgebra de Weyl, la definición de otros operadores de campo podría depender de la representación particular escogida dentro del conjunto considerado, tal y como ocurre para los operadores cuadráticos, como, por ejemplo, los correspondientes a las contribuciones de las inhomogeneidades al modo cero de la ligadura hamiltoniana. Ciertas condiciones sobre los operadores físicos relevantes, como es el caso del hamiltoniano, podrían eliminar la libertad todavía existente en la elección de la representación de Fock, al menos parcialmente. Un ejemplo razonable podría ser la exigencia de que los operadores considerados estuvieran bien definidos y fueran esencialmente autoadjuntos. Otras propiedades relativas a su posible regularización serían también relevantes, aunque desde nuestro punto de vista los esquemas de regularización deberían emerger directamente a partir de la cuantización del sistema, y no como técnicas importadas de la Teoría Cuántica de Campos en espacio-tiempos curvos, ya que sería normal pensar que tales técnicas encuentren su propia justificación en una teoría cuántica más fundamental del espacio-tiempo, y se asume que LQC es, al menos en buena medida, un marco de este tipo.

Vamos a suponer que (bien imponiendo condiciones adicionales sobre los operadores físicos, bien por mera elección) tomamos una cuantización de Fock dentro de la familia de representaciones invariantes bajo las isometrías espaciales que acabamos de comentar, y de esta forma, en particular, promovemos a operadores las variables $\tilde{v}^{2}_{\vec{n},\epsilon}$ y ${}^{2}_{\tilde{v}_{\vec{n},\epsilon}}$ que aparecen en la ecuación (4.3.8). Llamaremos $\mathcal{F}$ al espacio de Fock correspondiente. Una base para éste viene dada por los estados del número de ocupación, $|\mathcal{N}\rangle$, en el cual un número finito de modos presentan cierto estado de *excitación* (propio del lenguaje de partículas) cuando se interpretan en términos de los operadores de creación y aniquilación de la representación [59]. El espacio de Hilbert cinemático total de nuestra cuantización es básicamente el producto de aquéllos de las variables homogéneas e inhomogéneas, $\mathcal{H}_{\text{kin}} = \mathcal{H}^{\text{grav}}_{\text{kin}} \otimes \mathcal{H}^{\text{matt}}_{\text{kin}} \otimes \mathcal{F}$. Evidentemente, el modo cero de la ligadura hamiltoniana tiene una acción no trivial sobre este espacio, puesto que no respeta su estructura de producto, porque la parte que es cuadrática en las perturbaciones mezcla los sectores homogéneos e inhomogéneos. De acuerdo con nuestro análisis previo, esta ligadura se puede reescribir de la forma $\hat{C} = \hat{C}_0 + \sum_{\vec{n},\epsilon} \hat{C}^{\vec{n},\epsilon}_2$, donde los operadores que representan $C^{\vec{n},\epsilon}_2$, a saber,

$$\hat{C}^{\vec{n},\epsilon}_2 = -\hat{\Theta}^{\vec{n},\epsilon}_{\text{e}} - \left(\hat{\Theta}^{\vec{n},\epsilon}_{\text{o}} \,\hat{}_{\phi}\right)_S, \tag{4.3.12}$$

se construyen siguiendo las prescripciones que hemos detallado anteriormente. El símbolo $(\ )_S$ denota la simetrización respecto al producto de operadores. Esto tiene en cuenta el producto de $\hat{}_{\phi}$ con funciones de $\phi$: aquí, en particular, con el factor $W'(\phi)$ en la ecuación (4.3.8b), si el potencial del campo tiene una primera derivada no nula. Por conveniencia para el resto de nuestra discusión, vamos a introducir la notación

$$\hat{C}_2 = \sum_{\vec{n},\epsilon} \hat{C}^{\vec{n},\epsilon}_2 = -\hat{\Theta}_{\text{e}} - \left(\hat{\Theta}_{\text{o}} \,\hat{}_{\phi}\right)_S, \tag{4.3.13a}$$

$$\hat{\Theta}_{\text{e}} = \sum_{\vec{n},\epsilon} \hat{\Theta}^{\vec{n},\epsilon}_{\text{e}}, \quad \hat{\Theta}_{\text{o}} = \sum_{\vec{n},\epsilon} \hat{\Theta}^{\vec{n},\epsilon}_{\text{o}}. \tag{4.3.13b}$$

## 4.4. Aproximación de Born-Oppenheimer

En esta sección, analizaremos el comportamiento de los posibles estados físicos del sistema cuya dependencia en los grados de libertad homogéneos de la geometría de FLRW, por un lado, y en los modos inhomogéneos, por otro, se puede factorizar. Esta hipótesis será válida, esencialmente, cuando estos dos tipos de grados de libertad presenten diferentes ritmos de variación con respecto a la parte homogénea $\phi$ del campo material, entendido éste como un tiempo interno del sistema (al menos en algunos intervalos de la evolución). Es precisamente en este sentido en el que decimos que nuestro ansatz para los estados es de tipo Born-Oppenheimer. Concretamente, vamos a considerar soluciones cuyas funciones de onda $\Psi$ adoptan la siguiente forma,

$$\Psi = \chi(\quad, \phi) \quad (\mathcal{N}, \phi), \tag{4.4.1}$$

donde la dependencia en las variables de MS se ha incluido mediante la etiqueta $\mathcal{N}$ de la base de estados del número de ocupación para los modos inhomogéneos, y la etiqueta manifiesta, simplemente, dependencia en la geometría de FLRW.

Además, asumimos que la parte que contiene esta dependencia en la geometría viene dada por un estado $\chi_0(\quad)$ de los grados de libertad gravitacionales homogéneos para un valor fijo $\phi_0$ de $\phi$, que evoluciona con el operador $\hat{\mathcal{H}}_0$ a otros valores de la variable homogénea del campo escalar. En concreto, consideramos únicamente estados $\chi_0(\quad)$ sobre los cuales $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$ actúa como su parte positiva; entonces, $\hat{\mathcal{H}}_0$ se puede definir tal y como lo hicimos en la sección anterior y, al menos cuando su variación con respecto a $\phi$ sea despreciable, lo podremos interpretar como el hamiltoniano para los estados de frecuencia positiva en la cuantización de lazos del modelo de FLRW después de realizar la deparametrización del sistema, tomando el campo escalar $\phi$ como un tiempo interno[5]. Resumiendo,

$$\chi(\quad, \phi) = \mathcal{P}\left[\exp\left(i\int_{\phi_0}^{\phi} d\tilde{\phi}\,\hat{\mathcal{H}}_0(\tilde{\phi})\right)\right]\chi_0(\quad). \tag{4.4.2}$$

El estado $\chi_0$ está normalizado a la unidad en el producto interno del espacio de Hilbert cinemático para la geometría de FLRW, $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$. El símbolo $\mathcal{P}$ denota la ordenación de *tiempo* con respecto a $\phi$, que es necesaria puesto que, en general, $\hat{\mathcal{H}}_0$ depende de $\phi$ a través del potencial. Dado que $\hat{\mathcal{H}}_0$ es autoadjunto para cada valor de $\phi$ tal y como ya argumentamos, remarcamos que la evolución que genera es unitaria. Además, y aunque no es estrictamente necesario para la mayor parte de nuestra discusión, supondremos que el estado de la geometría FLRW $\chi_0$ está picado y permanece picado en su evolución (para todos los valores de $\phi$ que consideremos), y que su pico queda definido por las ecuaciones efectivas de LQC para universos homogéneos e isótropos, deducidas para estados con un comportamiento semiclásico para volúmenes grandes en la referencia [45].

Incorporamos este ansatz en la ecuación para la ligadura[6] $\hat{C}\Psi = 0$. Si despreciamos posibles elementos no-diagonales en la geometría homogénea (esto es, posibles transiciones

[5] Un procedimiento similar se puede seguir para los métodos de promedio sobre grupos, teniendo en cuenta el hamiltoniano de frecuencia positiva considerado, $\hat{\mathcal{H}}_0$, como una prescripción de la cuantización específica de FLRW, que afecta también a la representación de la contribución homogénea de la ligadura.

[6] Puesto que uno no esperaría que las soluciones pertenezcan al espacio de Hilbert cinemático, deberíamos imponer más bien la ligadura en la forma $(\quad|\hat{C}^{\dagger} = 0$ sobre un tipo generalizado de estados $(\quad|$, donde la daga denota la autoadjunción. Tras esta advertencia, continuaremos nuestra discusión sin introducir autoadjuntos, por simplicidad.

cuánticas de $\chi$ a otros estados mediante la acción de la ligadura), y consideramos únicamente la parte diagonal, que puede ser extraída tomando el producto interno con el estado $\chi$ en $\mathcal{H}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{grav}}$, llegamos al resultado

$$-\partial_{\phi}^{2} \quad -i\left(2\langle\hat{\mathcal{H}}_0\rangle_{\chi}-\langle\hat{\Theta}_{\mathrm{o}}\rangle_{\chi}\right)\partial_{\phi} \quad =\left[\langle\hat{\Theta}_{\mathrm{e}}+\left(\hat{\Theta}_{\mathrm{o}}\hat{\mathcal{H}}_0\right)_S\rangle_{\chi}+i\langle \mathrm{d}_{\phi}\hat{\mathcal{H}}_0-\frac{1}{2}\mathrm{d}_{\phi}\hat{\Theta}_{\mathrm{o}}\rangle_{\chi}\right] \quad . \tag{4.4.3}$$

Aquí, $\langle\ \rangle_{\chi}$ es el valor esperado sobre $\chi$ con respecto al producto interno en $\mathcal{H}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{grav}}$, y $\mathrm{d}_{\phi}$ representa lo que en la imagen de Heisenberg sería la derivada . al de un operador respecto a $\phi$; es decir, para un operador $\hat{O}$ tenemos[7]

$$\mathrm{d}_{\phi}\hat{O}=\partial_{\phi}\hat{O}-i[\hat{\mathcal{H}}_0,\hat{O}]. \tag{4.4.4}$$

Hacemos notar que, en el caso de $\hat{\mathcal{H}}_0$, el último término de (4.4.4) no contribuye porque el conmutador se anula.

La ecuación de ligadura (4.4.3) dará lugar a una ecuación tipo Schrödinger para la evolución de las inhomogeneidades en términos de $\phi$ siempre y cuando se satisfagan las siguientes condiciones:

a) $\langle\hat{\Theta}_{\mathrm{o}}\rangle_{\chi}$ tiene que ser despreciable cuando se compara con $\langle\hat{\mathcal{H}}_0\rangle_{\chi}$ en el término proporcional a la derivada de . En nuestro esquema perturbativo, este siempre es el caso si reiteramos la idea de mantener la aproximación como una expansión asintótica (en el límite en que un cierto parámetro perturbativo se anula), en la cual $\mathcal{H}_0$ es del orden de la unidad. En la práctica, sin embargo, la aproximación es aceptable si es verdad que la contribución cuadrática de las inhomogeneidades dadas por el término $\hat{\Theta}_{\mathrm{o}}$ continúa siendo pequeña cuando se compara con el generador de la evolución en $\phi$ para el caso de FLRW (se pueden encontrar algunos comentarios adicionales en la sección 4.5).

b) Debe ser posible despreciar la segunda derivada de en la ecuación. Esto podría comprobarse a partir de criterios de autoconsistencia, porque si uno asume que es cierto, junto con la condición a), podría obtenerse el valor de $\partial_{\phi}$ a partir de la ecuación (4.4.3). Entonces, derivando este valor con respecto a $\phi$, uno puede ver si la segunda derivada de la función de onda de las perturbaciones es en verdad despreciable en comparación con la primera derivada. Volveremos sobre este asunto más adelante.

Además de todo esto, si la evolución de las inhomogeneidades en $\phi$ está gobernada por un Hamiltoniano real (algo necesario si queremos que sea autoadjunto en el espacio de Fock), uno necesita:

[7] Elegimos el signo del generador de la evolución de acuerdo con nuestro convenio de frecuencia positiva.

c) la $\phi$-derivada total de $(2\hat{\mathcal{H}}_0 - \hat{\Theta}_{\rm o})$ debe ser despreciable en comparación con la contribución del hamiltoniano de MS.

Si estas tres condiciones son ciertas, se verifica que

$$-i\partial_\phi \quad = \frac{\langle \hat{\Theta}_{\rm e} + \big(\hat{\Theta}_{\rm o}\hat{\mathcal{H}}_0\big)_S \rangle_\chi}{2\langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\chi} \quad . \tag{4.4.5}$$

Remarcamos que $\langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\chi$ es una función de $\phi$, y, por tanto, podemos dividir por ella, mientras no sea nula. El término del lado derecho que está actuando sobre podría ser interpretado en esta aproximación como el hamiltoniano generador de la dinámica de las perturbaciones en el tiempo interno $\phi$. Éste es precisamente el hamiltoniano de MS, con su dependencia en las variables homogéneas de la geometría evaluadas sobre los valores esperados correspondientes al estado cuántico $\chi$, y dividido por el valor esperado de $\hat{\mathcal{H}}_0$. Este último factor (como demostraremos más tarde) puede entenderse que surge por el cambio de tiempo a la variable $\phi$ del sistema en la trayectoria del pico de $\chi$.

Vamos a suponer que únicamente admitimos como válida la condición a), la cual, como ya hemos explicado, siempre podríamos justificar basándonos en la jerarquía perturbativa. Entonces tendríamos que

$$-i\partial_\phi \quad = \frac{1}{2\langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\chi}\left[\langle \hat{\Theta}_{\rm e} + \big(\hat{\Theta}_{\rm o}\hat{\mathcal{H}}_0\big)_S \rangle_\chi + i\langle {\rm d}_\phi \hat{\mathcal{H}}_0 - \frac{1}{2}{\rm d}_\phi \hat{\Theta}_{\rm o} \rangle_\chi\right] \quad + \frac{1}{2\langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\chi}\partial_\phi^2 \quad , \tag{4.4.6}$$

por lo que, derivando esta expresión con respecto a $\phi$ y eliminando los términos que son despreciables en el esquema perturbativo, obtenemos

$$\begin{aligned}\left[\frac{3\langle {\rm d}_\phi \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\chi}{2\langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\chi} - 2i\langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\chi\right]\partial_\phi^2 \quad &= \left[\langle {\rm d}_\phi \hat{\Theta}_{\rm e} + {\rm d}_\phi \big(\hat{\Theta}_{\rm o}\hat{\mathcal{H}}_0\big)_S \rangle_\chi + i\langle {\rm d}_\phi^2 \hat{\mathcal{H}}_0 - \frac{1}{2}{\rm d}_\phi^2 \hat{\Theta}_{\rm o} \rangle_\chi\right] \\ -\frac{\langle {\rm d}_\phi \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\chi}{\langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\chi}&\left[2\langle \hat{\Theta}_{\rm e} + \big(\hat{\Theta}_{\rm o}\hat{\mathcal{H}}_0\big)_S \rangle_\chi + \frac{i}{2}\langle 3{\rm d}_\phi \hat{\mathcal{H}}_0 - 2{\rm d}_\phi \hat{\Theta}_{\rm o} \rangle_\chi\right] \quad + \partial_\phi^3 \quad .\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

A partir de esta ecuación podríamos analizar la consistencia de asumir que cada derivada de orden superior de con respecto a $\phi$ es despreciable en comparación con la de orden inferior, y, por consiguiente, si la condición b) se satisface.

Uno se podría convencer fácilmente, mediante el análisis anterior, de que la validez de las condiciones b) y c) dependerá de cómo de despreciables sean las derivadas *totales* de los operadores $\hat{\mathcal{H}}_0$, $\hat{\Theta}_{\rm e}$, y $\hat{\Theta}_{\rm o}$ [y también de $(\hat{\Theta}_{\rm o}\hat{\mathcal{H}}_0)_S$] con respecto a $\phi$. En concreto, una revisión más cuidadosa de las condiciones b) y c), una vez ha sido aceptada la validez de a), indica que necesitaríamos que las derivadas de los operadores mencionados sean despreciables en comparación con el hamiltoniano de MS, en sus valores esperados sobre $\chi$. En realidad, uno podría relajar la condición c) y mantener la contribución de $\langle d_\phi \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\chi$ en la ecuación (4.4.6), que sería absorbida luego por un cambio de norma dependiente de $\phi$ en $\chi$. En tal caso, puede mostrarse que, en lugar de la contribución mencionada que va con la derivada, son su cuadrado y $\langle d^2_\phi \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\chi$ los que deberían ser despreciables con respecto a los valores esperados del hamiltoniano de MS.

Antes de continuar y dar un análisis detallado de las circunstancias bajo las cuales estas derivadas pueden ser ignoradas en nuestras ecuaciones, vamos a recordar que las derivadas totales contienen dos tipos de términos [véase la ecuación (4.4.4)]. Por un lado, tenemos derivadas de los operadores con respecto a la dependencia explícita en $\phi$. Esta dependencia proviene exclusivamente del potencial al que está sometido el campo material escalar. Si las derivadas de este potencial fueran suficientemente pequeñas dentro del rango posible de variación de $\phi$, todos los términos de este tipo serían despreciables al orden deseado. Por ejemplo, si el potencial es un término de masa, fenomenológicamente los posibles valores de la masa son pequeños, y las derivadas del potencial podrían ser tratadas dentro del propio esquema perturbativo, esto es, expresando el valor de la masa como una cierta potencia del parámetro de las perturbaciones inhomogéneas. Pero todavía existe un segundo tipo de términos. Éstos son conmutadores de los operadores con $\hat{\mathcal{H}}_0$. Dichos conmutadores aportan contribuciones no-nulas en las derivadas de los operadores $\Theta$ que aparecen en el hamiltoniano de MS. Dado que la dependencia en las variables homogéneas de estos operadores y de $\hat{\mathcal{H}}_0$ aparece sólo a través de las variables de la geometría de FLRW y $\phi$, el conmutador en cuestión toma valores no triviales sólo a causa de las contribuciones de la geometría homogénea. Así pues, el conmutador puede adquirir términos relevantes a partir de la dependencia del operador $\hat{\mathcal{H}}_0$ en $\hat{\Omega}_0^2$ y de los operadores $\hat{\Theta}$ en $\hat{\ }$, y viceversa. Recordamos que el conmutador de $\hat{\Omega}_0^2$ y $\hat{\ }$ proporciona un término proporcional a $\operatorname{sen}(2b)$ en el régimen efectivo de LQC para geometrías de FLRW[8], un término que puede ser del orden de la unidad en algunas etapas de la evolución. En realidad, el rebote o Big Bounce correspondería a los valores de $\operatorname{sen} b$ iguales a uno, y sería precedido y seguido por regiones donde el seno de $2b$ estuviera cerca a la unidad. Es precisamente en dichas regiones donde diferentes autores, que estudian el cierre del álgebra modificada de ligaduras en LQG y sus consecuencias para las perturbaciones cosmológicas, han afirmado que la estructura del espacio-tiempo sufre un cambio de signatura [54–57, 156]. Independientemente de la posibilidad de que ocurra este proceso de cambio de signatura, vemos que existen razones suficientes para admitir que estas contribuciones a los conmutadores, y por tanto a las ecuaciones de las perturbaciones cosmológicas, podrían no ser siempre despreciables. Por tanto, las condiciones b)-c) deberían ser comprobadas explí-

[8]Este término también es proporcional al volumen homogéneo, pero el factor adicional podría compensarse por un decrecimiento en las potencias de esta variable causada por la derivada respecto a  tomada sobre uno de los operadores que participan en el conmutador.

citamente en cada caso estudiado para confirmar que son válidas antes de que uno introduzca las aproximaciones en la ecuación de evolución (4.4.6) con el objeto de obtener la relación de tipo Schrödinger (4.4.5) en nuestra cuantización híbrida.

## 4.5. Orden de factores alternativo

En la sección previa hemos visto que, una vez introducido el ansatz de Born-Oppenheimer en la cuantización híbrida, algunos términos en la ecuación de la ligadura que deberían despreciarse para llegar a una ecuación tipo Schrödinger surgen a partir de derivadas totales de operadores con respecto al tiempo interno $\phi$. Una segunda vuelta sobre estos términos desvela que en realidad derivan de ambigüedades durante el procedimiento de cuantización en el orden de factores. En otras palabras, estos términos podrían ser absorbidos adoptando un orden de factores diferente. En realidad, la parte de las derivadas totales que viene dada por un conmutador con el hamiltoniano homogéneo $\hat{\mathcal{H}}_0$ es evidentemente una corrección cuántica (que puede ser eliminada si uno cambia el orden de los operadores en la expresión). Pero algo similar ocurre, también, con las derivadas parciales de los operadores con respecto a $\phi$ en los valores esperados sobre la geometría homogénea: en la cuantización que discutimos en la sección previa, estas derivadas parciales podían identificarse con los conmutadores de los operadores considerados con el momento de la parte homogénea del campo escalar, $\hat{\pi}_\phi$. A la luz de estos comentarios, parece natural buscar un orden de factores diferente en esta cuantización para el cual uno pueda, en particular, derivar una ecuación de evolución para las perturbaciones similar a la que se ha propuesto a partir del formalismo de la métrica vestida [62, 63]. Recordemos, en este sentido, que excepto por un reescalado diferente de los modos inhomogéneos en el campo de materia y las variables de MS asociadas, la contribución cuadrática a la ligadura $\Theta_e + \Theta_o \pi_\phi$ es precisamente el hamiltoniano para las inhomogneidades que genera su evolución en el tiempo dado por $dt = 2 \quad d$ en la teoría clásica, donde $t$ es el tiempo propio [véase la ecuación (4.3.7) y la definición de la parte homogénea de la función lapso en la ecuación (4.2.3)].

Como hemos visto, el modo cero de la ligadura Hamiltoniana [salvo por un factor $\sigma/(2\quad)$] viene dado clásicamente por $C = \pi_\phi^2 - \mathcal{H}_0^2 - \Theta_e - \Theta_o \pi_\phi$ (donde hemos usado una notación obvia para las funciones del espacio de fases clásico que aparecen en la ligadura). De forma inmediata vemos que, al orden de truncamiento considerado, tenemos

$$C = \left[ \pi_\phi + \mathcal{H}_0 + \frac{1}{2}\left(\Theta_e + \Theta_o \pi_\phi\right)\mathcal{H}_0^{-1} \right] \left[ \pi_\phi - \mathcal{H}_0 - \frac{1}{2}\mathcal{H}_0^{-1}\left(\Theta_e + \Theta_o \pi_\phi\right) \right]. \qquad (4.5.1)$$

Si interpretamos nuestra aproximación como una expansión asintótica, los términos de la forma $\mathcal{H}_0^{-1}\left(\Theta_e + \Theta_o \pi_\phi\right)$ pueden tratarse aún en un esquema perturbativo como correcciones cuadráticas. En la práctica, sin embargo, los resultados del análisis tendrán validez sólo si estos términos son realmente pequeños. Esto podría complicarse cuando $\mathcal{H}_0$ tome valores pequeños (cuánticamente, en la región del espectro del operador $\hat{\mathcal{H}}_0$ cercano a su núcleo). Notamos que este sector corresponde a valores pequeños del momento del campo escalar homogéneo cuando las inhomogeneidades son también pequeñas. Esto podría ser problemático para la precisión numérica de la aproximación con el orden de factores alternativo que estamos intentando adoptar ahora.

Merece la pena comentar que esta situación es diferente a la que encontramos en la sección 4.4. Allí, necesitábamos la condición a) para deducir la ecuación (4.4.6), pero dicha condición únicamente requería que (bajo valores esperados) la contribución $\Theta_{\mathrm{o}}$ de MS sea despreciable comparada con el hamiltoniano homogéneo $\mathcal{H}_0$. Tal y como uno puede comprobar en la ecuación (4.3.8b), $\Theta_{\mathrm{o}}$ es proporcional a la derivada del potencial del campo escalar, que puede ser considerablemente pequeña. En el caso que aquí nos ocupa, un potencial de un campo masivo, esta derivada es $m^2\phi$. Teniendo en cuenta que, en la teoría efectiva de LQC para universos FLRW, el valor absoluto del campo homogéneo tiene una cota superior para este potencial del orden de $1/m$ (véase la referencia [157]), se concluye que, en el rango de variación permitido, la derivada del potencial es cuando menos del orden de la masa. En resumidas cuentas, $\Theta_{\mathrm{o}}$ es una contribución cuadrática en las perturbaciones inhomogéneas multiplicada, además, por un factor de orden $m$, lo que proporciona una cantidad verdaderamente pequeña y justifica la validez de la condición a) que introdujimos en la sección anterior.

Podemos ahora cuantizar la ligadura con el orden de factores que tomamos en la ecuación (4.5.1), adoptando para cada factor las prescripciones de la sección previa. Este orden de factores, aunque no es simétrico, es particularmente apropiado si estamos interesados en soluciones *perturbativas* de frecuencia positiva con respecto a la variable $\phi$. Para este tipo de soluciones, que podrían continuar siendo significativas en el límite asintótico en el que las perturbaciones desaparecen, el primer factor (en la parte izquierda) de la ecuación de ligadura no puede aniquilar el estado cuántico. Sus correspondientes soluciones de frecuencia positiva con respecto a $\phi$ serían aniquilada por $\hat{\ }_{\phi}$ —y por ello pertenecen al núcleo de $\hat{\mathcal{H}}_0$— en el límite de un truncamiento puramente homogéneo del sistema. Increíblemente, es en este entorno de su núcleo donde señalábamos que podría darse la posibilidad de que existan dificultades prácticas con la aproximación perturbativa en el orden de factores considerado aquí. Tras esta advertencia, las soluciones perturbativas $\Psi$ de frecuencia positiva quedan determinadas como soluciones a la ecuación

$$\left[\hat{\ }_{\phi} - \hat{\mathcal{H}}_0 - \frac{1}{2}\hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2}\left(\hat{\Theta}_{\mathrm{e}} + \left(\hat{\Theta}_{\mathrm{o}}\hat{\ }_{\phi}\right)_S\right)\hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2}\right]\Psi = 0. \tag{4.5.2}$$

Nótese que hemos adoptado un orden de factores algebraico simétrico para el producto del operador $\hat{\mathcal{H}}_0^{-1}$ con el hamiltoniano de MS, en lugar de otras simetrizaciones, de manera que no tenemos que cambiar la prescripción para la representación de este hamiltoniano.

Si ahora introducimos el ansatz de Born-Oppenheimer (4.4.1) y (4.4.2), e ignoramos los elementos no-diagonales en la geometría homogénea, tomando el producto interno en $\mathcal{H}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{grav}}$ con $\chi$, llegamos a la siguiente ecuación de evolución para las perturbaciones:

$$-i\partial_\phi \quad = \frac{1}{2}\Big\langle \hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2}\Big(\hat{\Theta}_{\mathrm{e}} + \big(\hat{\Theta}_{\mathrm{o}}\hat{\mathcal{H}}_0\big)_S\Big)\hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2} - \frac{i}{2}\hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2}\mathrm{d}_\phi\big(\hat{\Theta}_{\mathrm{o}}\hat{\mathcal{H}}_0^{-1}\big)\hat{\mathcal{H}}_0^{1/2}\Big\rangle_\chi \quad . \tag{4.5.3}$$

Esta ecuación de Schrödinger es similar a la ecuación de evolución para las perturbaciones en el formalismo de la métrica vestida. Las diferencias con respecto a la discusión en las referencias [62, 63] afectan únicamente al reescalado de los modos inhomogéneos y a las prescripciones para la cuantización del Hamiltoniano. En particular, la contribución de la derivada $\mathrm{d}_\phi(\hat{\Theta}_{\mathrm{o}}\hat{\mathcal{H}}_0^{-1})$ puede eliminarse con una elección diferente de la representación del operador para el producto de $\Theta_{\mathrm{o}}$, $\mathcal{H}_0^{-1}$, y el momento $\pi_\phi$. En realidad, de acuerdo a nuestros comentarios, esta contribución será una corrección cuántica a un término que no sólo es cuadrático en las perturbaciones, sino que además es proporcional a la derivada del potencial del campo material. Como consecuencia, a efectos prácticos, uno podría despreciarlo sin más.

Otro resultado que se obtiene de forma inmediata a partir de nuestra discusión es la diferencia, debida a la elección del orden de factores, entre la ligadura cuántica $\hat{C}^{\mathrm{d}}$ que nos lleva a la ecuación de evolución de la métrica vestida y la ligadura cuántica $\hat{C}$ de la sección anterior. Utilizando la misma simetrización algebraica para los productos de $\hat{\mathcal{H}}_0^{-1}$ con las contribuciones de MS en los dos factores de la ligadura $\hat{C}^{\mathrm{d}}$, ignorando las prescripciones para la cuantización del hamiltoniano de MS y $\hat{\mathcal{H}}_0$, y recordando que $\hat{\pi}_\phi = -i\partial_\phi$, llegamos a

$$\hat{C} - \hat{C}^{\mathrm{d}} = \Big[\hat{\pi}_\phi, \hat{\mathcal{H}}_0 + \frac{1}{2}\hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2}\Big(\hat{\Theta}_{\mathrm{e}} + \big(\hat{\Theta}_{\mathrm{o}}\hat{\pi}_\phi\big)_S\Big)\hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2}\Big] - \frac{1}{2}\Big[\hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2}, \Big[\hat{\mathcal{H}}_0^{1/2}, \hat{\Theta}_{\mathrm{e}} + \big(\hat{\Theta}_{\mathrm{o}}\hat{\pi}_\phi\big)_S\Big]\Big]. \tag{4.5.4}$$

De este modo, la diferencia entre las dos ligaduras es igual a una suma de conmutadores entre operadores y, por tanto, equivale a una discrepancia en la elección del orden de factores. En este sentido, podemos decir que el formalismo de la métrica vestida podría estar relacionado con una descripción simpléctica del modelo de FLRW perturbado como un sistema ligado. Obviamente, si uno trunca el formalismo para eliminar todas las correcciones a los modos cero que son cuadráticas en las perturbaciones, la estructura simpléctica canónica se pierde, y no subsiste la ligadura, puesto que modifica la dinámica de esos modos, precisamente, con contribuciones perturbativas de segundo orden [57].

## 4.6. Ecuaciones de Mukhanov-Sasaki efectivas

Para cerrar este capítulo, calcularemos las ecuaciones efectivas para las variables de MS en los diferentes esquemas de cuantización que hemos discutido, extrapolando la experiencia adquirida en los modelos homogéneos y asumiendo una relación directa entre los operadores de creación y aniquilación para las inhomogeneidades y su contrapartida clásica. Vamos a empezar con el formalismo híbrido en la descripción de las perturbaciones obtenida con el ansatz de Born-Oppenheimer. En este caso, la evolución de las perturbaciones se rige por la ecuación (4.4.3) [y la (4.4.4)], que se puede interpretar como el resultado de una ligadura $\hat{C}_{\mathrm{per}}$ que emerge del operador de ligadura original $\hat{C}$ y que se impone sobre el sector del modelo compuesto por los grados de libertad del campo escalar homogéneo y los modos inhomogéneos, es decir, sobre $\mathcal{H}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{matt}} \otimes \mathcal{F}$. Teniendo en cuenta la densitización de la ligadura [dada en las ecuaciones (4.3.3) y (4.3.7)] y la definición de la parte homogénea de la función lapso, no es difícil darse cuenta de que $\hat{C}_{\mathrm{per}}/2$ genera la evolución en un tiempo $\bar{\ }$ que, al orden perturbativo que nos importa, está relacionado con el tiempo propio mediante $dt = \ d\bar{\ }$ (el factor $1/2$ en la ligadura se ha introducido aquí por conveniencia). Asumiendo la validez de nuestra condición a) de la sección anterior, esta ligadura sobre la función de onda de las perturbaciones toma la forma

$$\hat{C}_{\mathrm{per}} = \hat{\ }^2_{\phi} + D_\chi(\phi)\hat{\ }_{\phi} + E_\chi(\phi) - \left\langle \hat{\Theta}_{\mathrm{e}} + \left(\hat{\Theta}_{\mathrm{o}}\hat{\mathcal{H}}_0\right)_S - \frac{i}{2}\mathrm{d}_\phi \hat{\Theta}_{\mathrm{o}} \right\rangle_\chi . \tag{4.6.1}$$

Aquí, $D_\chi$ y $E_\chi$ son dos funciones de $\phi$ que dependen del estado $\chi$ de la geometría homogénea, y que no especificaremos porque no serán relevantes para nuestros cálculos.

De acuerdo con nuestras premisas, las ecuaciones efectivas para las variables de MS podrían calcularse utilizando la ligadura efectiva $C_{\mathrm{per}}/2$ como generador de la evolución en el tiempo $\bar{\ }$, obtenida reemplazando $\hat{\ }_\phi$ y los operadores de creación y aniquilación para las inhomogeneidades por sus análogos clásicos, y tomando los corchetes de Poisson estándares en el sector de la variable del campo escalar homogéneo y los modos inhomogéneos. Recordando las expresiones (4.3.8), vemos que toda la dependencia en $\ _{\tilde{v}_{\vec{n},\epsilon}}$ del generador de la evolución viene dada por un término $\langle \widehat{[1/\ \ ]}^{-2/3} \rangle_\chi\ ^2_{\tilde{v}_{\vec{n},\epsilon}}/2$ proveniente de $\langle \hat{\Theta}_{\mathrm{e}} \rangle_\chi$. A la vista de esto, resulta más conveniente introducir un cambio de tiempo

$$d\eta_\chi = \langle \widehat{[1/\ \ ]}^{-2/3} \rangle_\chi d\bar{\ }, \tag{4.6.2}$$

de manera que obtengamos a una ecuación de evolución más sencilla, $d_{\eta_\chi}\tilde{v}_{\vec{n},\epsilon} = \ _{\tilde{v}_{\vec{n},\epsilon}}$, donde $d_{\eta_\chi}$ denota la derivada respecto a $\eta_\chi$.

Cabe hacer notar que, con nuestra definición, la derivada $d\eta_\chi/d\bar{\ }$ es estrictamente no-negativa (el operador $\widehat{[1/\ \ ]}$ es estrictamente positivo en el complemento ortogonal del estado de volumen cero, donde hemos llevado a cabo la cuantización), asegurando que el cambio de tiempo está bien definido. Esta derivada del tiempo es una función únicamente de $\phi$. Al evaluarla sobre las soluciones de las ecuaciones efectivas, proporciona una función de tiempo. Es importante subrayar que no habría sido posible definir esta reparametrización del tiempo si la derivada temporal hubiera sido un operador. Por ello, el valor esperado de $\chi$ es esencial a la hora de introducir el cambio. También remarcamos que este cambio depende del estado, y por tanto las propiedades de la evolución en los tiempos $\bar{\ }$ y $\eta_\chi$ pueden ser particularmente distintas cuando las consideramos en el espacio de Hilbert físico del sistema. Finalmente, tomando la relación $d\eta_\chi = \langle \widehat{[1/\ \ ]}^{-2/3} \rangle_\chi dt/\ $, y recordando que $\ ^{1/3} = l_0 \sigma e^{\tilde{\alpha}}$ es el factor de escala (salvo una constante multiplicativa), podemos concluir que este nuevo tiempo puede ser interpretado como un tiempo conforme.

Para deducir las ecuaciones efectivas de MS, todavía necesitamos obtener la derivada temporal de las variables de momento $\ _{\tilde{v}_{\vec{n},\epsilon}}$, cada una de ellas calculada a partir de los corchetes de Poisson de la variable con $C_{\rm per}/2$, dividido por $\langle \widehat{[1/\ \ ]}^{-2/3} \rangle_\chi$. Definiendo

$$\left\langle \hat{\vartheta}_{\mathrm{e},(\tilde{v})} \right\rangle_\chi \tilde{v}^2_{\vec{n},\epsilon} = -\frac{1}{\langle \widehat{[1/\ \ ]}^{-2/3} \rangle_\chi} \langle \hat{\Theta}^{\vec{n},\epsilon}_{\mathrm{e}} \rangle_\chi - \tilde{\omega}_n^2 \tilde{v}^2_{\vec{n},\epsilon} - \ ^2_{\tilde{v}_{\vec{n},\epsilon}}, \tag{4.6.3a}$$

$$\left\langle \hat{\vartheta}_{\mathrm{o},(\tilde{v})} \right\rangle_\chi \tilde{v}^2_{\vec{n},\epsilon} = -\frac{1}{\langle \widehat{[1/\ \ ]}^{-2/3} \rangle_\chi} \left\langle \left( \hat{\Theta}^{\vec{n},\epsilon}_{\mathrm{o}} \hat{\mathcal{H}}_0 \right)_S - \frac{i}{2} \mathrm{d}_\phi \hat{\Theta}^{\vec{n},\epsilon}_{\mathrm{o}} \right\rangle_\chi, \tag{4.6.3b}$$

y tratando clásicamente las variables de creación y aniquilación que aparecen en los operadores $\hat{\Theta}$, obtenemos

$$d^2_{\eta_\chi} \tilde{v}_{\vec{n},\epsilon} = -\tilde{v}_{\vec{n},\epsilon} \left[ \tilde{\omega}_n^2 + \left\langle \hat{\vartheta}_{\mathrm{e},(\tilde{v})} + \hat{\vartheta}_{\mathrm{o},(\tilde{v})} \right\rangle_\chi \right]. \tag{4.6.4}$$

Son pertinentes varios comentarios al respecto. Notemos primero que, a partir de nuestras definiciones, el último factor de los corchetes de esta ecuación de MS es una función de $\phi$ únicamente, y, por tanto, del tiempo cuando el campo escalar se evalúa en las soluciones de las ecuaciones efectivas. Este factor contiene modificaciones cuánticas con respecto a la ecuación estándar de MS. Aún así, las ecuaciones que hemos derivado continúan siendo de tipo oscilador armónico con frecuencias dependientes del tiempo. Además, no aparecen términos disipativos y las ecuaciones son hiperbólicas en el régimen ultravioleta, donde $\tilde{\omega}_n^2$ es el término dominante en los corchetes.

Utilizando las ecuaciones (4.3.8) y (4.6.3), y con nuestras prescripciones para la cuantización, tenemos explícitamente que

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\vartheta}_{\mathrm{e},(\tilde{v})} \right\rangle_\chi =& \frac{4\ \ G}{3\left\langle \widehat{[1/\ \ ]}^{-2/3} \right\rangle_\chi} \left\langle \widehat{[1/\ \ ]}^{1/3} \left( 19 \hat{\mathcal{H}}_0^2 - 24\ \ G\gamma^2 \hat{\mathcal{H}}_0^2 \hat{\Omega}_0^{-2} \hat{\mathcal{H}}_0^2 \right) \widehat{[1/\ \ ]}^{1/3} \right\rangle_\chi \\ &+ \frac{\left\langle \widehat{[1/\ \ ]}^{-2/3}\ \hat{}^{\,2/3} \right\rangle_\chi}{\left\langle \widehat{[1/\ \ ]}^{-2/3} \right\rangle_\chi} \left( W'' - \frac{16\ \ G}{3} W \right), \end{aligned} \tag{4.6.5a}$$

$$\left\langle \hat{\vartheta}_{\mathrm{o},(\tilde{v})} \right\rangle_\chi = \frac{16\ \ G\gamma}{\left\langle \widehat{[1/\ \ ]}^{-2/3} \right\rangle_\chi} \left\langle \widehat{[1/\ \ ]}^{-1/3}\ \hat{}^{\,1/3} |\hat{\Omega}_0|^{-1} \hat{\Lambda}_0 |\hat{\Omega}_0|^{-1}\ \hat{}^{\,1/3} \widehat{[1/\ \ ]}^{-1/3} \left( \hat{\mathcal{H}}_0 W' - \frac{i}{2} W'' \right) \right\rangle_\chi, \tag{4.6.5b}$$

donde $W$ es el potencial del campo material: $m^2\phi^2/2$ en nuestro caso. Hemos incluido la contribución de $\left\langle \hat{\vartheta}_{o,(\tilde{v})} \right\rangle_\chi$, aunque sólo contiene derivadas del potencial y, en vista de nuestra discusión en la sección previa, esperamos que sean despreciables en la práctica.

Es tranquilizador saber que habríamos llegado al mismo resultado a partir de una ligadura cuántica $\hat{C}$ sobre el espacio de Hilbert cinemático total del sistema sin introducir la aproximación de Born-Oppenheimer, extrapolando las conjeturas de LQC sobre la dinámica efectiva y con ciertas sutilezas sobre la evaluación de los diferentes términos de las variables homogéneas sobre las soluciones efectivas. Basándose en esta extrapolación, uno podría aceptar que la evolución en el tiempo $\bar{\ }$ se genera a partir de la ligadura efectiva que uno obtiene reemplazando en $\hat{C}$ los operadores de creación y aniquilación para los modos inhomogéneos por sus contrapartidas clásicas, los operadores $\hat{\ }$ y $\hat{\ }_\phi$ (y $\hat{\phi}$) por sus análogos clásicos, excepto por ciertas cosas a tener en cuenta que comentaremos más adelante, y los operadores $\hat{\Omega}_0^2$ y $\hat{\Lambda}_0$ por las cantidades efectivas $\ ^2 \operatorname{sen}^2 b/\Delta$ y $\operatorname{sgn}(v) \quad \operatorname{sen}(2b)/(2\sqrt{\Delta})$, respectivamente, donde $b = \sqrt{\Delta}|\quad|^{-1/3}c$. Recordemos que $b$ es (salvo una factor constante multiplicativo) canónicamente conjugado a   bajo corchetes de Poisson. En cuanto al operador $\widehat{[1/\quad]}$, recordamos también que conmuta con el operador de volumen, y por ello puede ser expresado como una función de éste utilizando su descomposición espectral (ver, por ejemplo, [138]). Uno puede entonces encontrar las ecuaciones de movimiento que satisfacen las variables de MS de forma similar a lo que hicimos en el escenario de Born-Oppenheimer. Las sutilezas aparecen cuando consideramos los diferentes factores que dependen de las variables homogéneas en estas ecuaciones. En principio, esos factores deben evaluarse sobre una solución efectiva: precisamente la solución en la que está fuertemente picado el estado cuántico que admite la descripción efectiva. Si el estado está tan picado en una trayectoria que, en lo que respecta a los factores de las variables homogéneas, su evaluación en los valores esperados de los operadores básicos es esencialmente igual a los valores esperados de dichos factores tratados como operadores, la forma en que se haga la evaluación entre todas estas posibilidades es irrelevante. Si, por otro lado, existen diferencias que dependan de cómo se ha llevado a cabo esta evaluación (así sería en caso de considerar funciones genéricas cualesquiera sobre el sector homogéneo del espacio de fases), es evidente que, para recuperar los mismos resultados que en la aproximación de Born-Oppenheimer, la prescripción para la evaluación tiene que corresponder a la dada en la ecuación (4.6.5). Los mismos razonamientos se aplican para la definición del tiempo conforme $\eta_\chi$ sobre la solución efectiva. Con estas observaciones, la extrapolación de la dinámica efectiva que se encuentra en LQC para sistemas homogéneos e isótropos parece ser válida en la presente descripción para perturbaciones cosmológicas.

Por último, vamos a considerar las ecuaciones efectivas que se deducirían a partir de la descripción de Schrödinger derivada con el orden de factores alternativo que se presentó en la sección 4.5. Recordamos que, dejando de lado algunos asuntos relacionados con el reescalado de las inhomogeneidades y los detalles de la prescripción de la cuantización, esta descripción proporciona ecuaciones de evolución para las perturbaciones similares a las que se obtuvieron con el formalismo de la métrica vestida. El generador de la evolución en el tiempo $\phi$ es, de acuerdo con la ecuación (4.5.3),

$$\frac{1}{2}\langle \hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2}\left(\hat{\Theta}_{\mathrm{e}} + \left(\hat{\Theta}_{\mathrm{o}}\hat{\mathcal{H}}_0\right)_S\right)\hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2} - \frac{i}{2}\mathcal{H}_0^{-1/2}\mathrm{d}_\phi\left(\hat{\Theta}_{\mathrm{o}}\hat{\mathcal{H}}_0^{-1}\right)\hat{\mathcal{H}}_0^{1/2}\rangle_\chi. \tag{4.6.6}$$

Como en la discusión anterior sobre las ecuaciones efectivas en el formalismo híbrido, es conveniente introducir un cambio de tiempo que vendrá dado por una función de $\phi$ (y por tanto del tiempo original), dependiente del estado considerado para la geometría homogénea $\chi$. Llamamos a este tiempo $\eta_\chi^{\mathrm{d}}$, y lo definimos a través de la relación

$$d\eta_\chi^{\mathrm{d}} = \left\langle \hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2}\widehat{[1/\ \ ]}^{-2/3}\hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2}\right\rangle_\chi d\phi. \tag{4.6.7}$$

Notemos que la función de $\phi$ que determina la derivada $d\eta_\chi^{\mathrm{d}}/d\phi$ es estrictamente positiva.

A modo de paréntesis, hacemos ver que el campo escalar homogéneo $\phi$ y el tiempo $\bar{\ }$ que introdujimos anteriormente están relacionados en las soluciones efectivas mediante la ecuación de evolución $d\phi/d\bar{\ } = {}_\phi$. En la descripción efectiva, podríamos usar esta relación para cambiar el tiempo, reemplazando el momento ${}_\phi$ por su valor en la solución considerada, que al orden perturbativo dominante coincide con el valor esperado de $\hat{\mathcal{H}}_0$ en $\chi$. De esta forma, uno obtiene

$$d\eta_\chi^{\mathrm{d}} = \left\langle \hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2}\widehat{[1/\ \ ]}^{-2/3}\hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2}\right\rangle_\chi \left\langle \hat{\mathcal{H}}_0\right\rangle_\chi d\bar{\ }. \tag{4.6.8}$$

Comparando esta relación con la ecuación (4.6.2), vemos que $\eta_\chi^{\mathrm{d}}$ se puede interpretar de nuevo como un tiempo conforme, y que su definición corresponde a una prescripción diferente para la evaluación del factor de escala homogéneo.

Utilizando el generador (4.6.6) para la evolución en el tiempo $\phi$ (bajo corchetes de Poisson y, otra vez, viendo las variables de creación y aniquilación en su forma clásica), la reparametrización temporal que conduce al tiempo conforme $\eta_\chi^{\mathrm{d}}$, y un cálculo similar al que ya explicamos para el ansatz de Born-Oppenheimer en el formalismo híbrido, puede concluirse fácilmente que las ecuaciones efectivas de MS adoptan ahora la forma

$$d^2_{\eta_\chi^{\mathrm{d}}}\tilde{v}_{\vec{n},\epsilon} = -\tilde{v}_{\vec{n},\epsilon}\left[\tilde{\omega}_n^2 + \left\langle \hat{\vartheta}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{e},(\tilde{v})} + \hat{\vartheta}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{o},(\tilde{v})}\right\rangle_\chi\right], \tag{4.6.9}$$

donde

$$\left\langle \hat{\vartheta}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{e},(\tilde{v})}\right\rangle_\chi \tilde{v}^2_{\vec{n},\epsilon} = -\frac{1}{\langle \hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2}\widehat{[1/\ \ ]}^{-2/3}\hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2}\rangle_\chi}\langle \hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2}\hat{\Theta}_{\mathrm{e}}^{\vec{n},\epsilon}\hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2}\rangle_\chi - {}^{2}_{\tilde{v}_{\vec{n},\epsilon}} - \tilde{\omega}_n^2\tilde{v}^2_{\vec{n},\epsilon}, \tag{4.6.10a}$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{\vartheta}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{o},(\tilde{v})} \right\rangle_{\chi} \tilde{v}^{2}_{\vec{n},\epsilon} = & -\frac{1}{\langle \hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2} \widehat{[1/\quad]}^{-2/3} \hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2} \rangle_{\chi}} \\
& \times \left\langle \hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2} \big(\hat{\Theta}_{\mathrm{o}}^{\vec{n},\epsilon} \hat{\mathcal{H}}_0\big)_S \hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2} - \frac{i}{2} \hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2} \mathrm{d}_{\phi} \big(\hat{\Theta}_{\mathrm{o}}^{\vec{n},\epsilon} \hat{\mathcal{H}}_0^{-1}\big) \hat{\mathcal{H}}_0^{1/2} \right\rangle_{\chi},
\end{aligned} \tag{4.6.10b}
$$

con la convención de que las variables de los modos inhomogéneos son tratadas clásicamente. El paralelismo con las ecuaciones (4.6.3) y (4.6.4) es evidente. Excepto por una contribución que (reescrita de forma apropiada) es proporcional a $\langle \hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2} \hat{\Theta}_{\mathrm{o}}^{\vec{n},\epsilon} \mathrm{d}_{\phi} \hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2} \rangle_{\chi}$ y que podría atribuirse a una elección específica del orden de factores —que además es despreciable si la derivada del potencial se puede ignorar—, la diferencia entre las dos ecuaciones efectivas de MS puede ser descrita diciendo que, en ratios de valores esperados, el estado $\chi$ se reemplaza en el presente caso por el estado $\hat{\mathcal{H}}_0^{-1/2}\chi$. Si el estado es tan picado que los valores esperados de los productos de operadores coinciden con los productos de las valores esperados correspondientes, entonces no se espera ninguna discrepancia si se adoptan las mismas prescripciones que antes para cuantizar las contribuciones cuadráticas de las perturbaciones (junto con $\mathcal{H}_0$ y el operador de la inversa del volumen).

# 5

# INVARIANCIA DE GAUGE Y CUANTIZACIÓN HÍBRIDA GENERALIZADA

## 5.1. Introducción

El siguiente paso para alcanzar el principal objetivo de esta tesis es la construcción de un formalismo canónico para el modelo perturbativo ya detallado que esté especialmente diseñado para preservar la covariancia al orden perturbativo que consideramos y que deje clara la invariancia de gauge.

Los primeros en abordar este tema para cuantizar el modelo con perturbaciones a partir del trabajo de J.J. Halliwell y S. W. Hawking [150] fueron I. Shirai y S. Wada [158], para el caso de topología esférica. En su trabajo, introdujeron una transformación canónica para el espacio de fases completo del sistema, modificando también las variables del fondo mediante contribuciones cuadráticas en las perturbaciones. Sin embargo, esa transformación está definida solamente en el límite semiclásico (sobre las trayectorias que marca una solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi que proporciona el hamiltoniano de orden cero), de manera que depende de cada solución efectiva particular estudiada. Asimismo, los estados físicos considerados todavía conservan cierta dependencia en cantidades perturbativas que no son invariantes de gauge. Y las variables que utilizan no son las de MS, si no una contrapartida cuántica de los invariantes de gauge de perturbaciones de la densidad. Más tarde, D. Langlois [159] hizo una revisión con la intención de aclarar este procedimiento utilizando técnicas inspiradas en la teoría de Hamilton-Jacobi para obtener las cantidades perturbativas invariantes de gauge, pero no incluyó transformaciones del espacio-tiempo de fondo y, además, ignoró la forma explícita en que la ligadura hamiltoniana depende de las variables que no son invariantes, apelando a su irrelevancia física. Por su parte, N. Pinto-Neto, junto con algunos de sus colaboradores [160, 161], ha propuesto más recientemente otro formalismo basado en transformaciones canónicas que también afectan al fondo, y que consideran las variables de MS. Es más, también usan redefiniciones de la función lapso. En particular, se centran en los casos de un fluido perfecto y de un campo escalar, y reformulan el sistema de manera que la ligadura hamiltoniana global depende únicamente de los invariantes de gauge y las nuevas variables del fondo. No obstante, durante el proceso, hacen uso de ligaduras de segunda clase y las eliminan por reducción y con la introducción de corchetes de Dirac. Por ello, el procedimiento ensombrece la legitimidad de la invariancia de gauge total del sistema y no queda claro el papel que desempeñan las ligaduras perturbativas.

En nuestro caso, vamos a introducir una transformación tal que las perturbaciones queden descritas por los invariantes de MS, combinaciones de las ligaduras perturbativas y cantidades canónicamente conjugadas a éstas, recurriendo para ello a la abelianización del álgebra de ligaduras. Por consistencia interna, vamos a presentar todos los pasos, adaptando las estrategias propuestas en los trabajos anteriores. En primer lugar, determinaremos el cambio a esta nueva descripción a partir de la formulación clásica que detallamos en la sección 4.2.1, basada a su vez en el tratamiento hamiltoniano de J.J. Halliwell y S. W. Hawking [150]. Ésta se obtendrá a través de una transformación canónica que será completada para incorporar las variables homogéneas del fondo. A continuación, discutiremos la cuantización del modelo resultante utilizando un algoritmo híbrido generalizado, a saber, combinando una cuantización (sin especificar) dada para el sector homogéneo con una teoría cuántica para las perturbaciones (asumiendo la compatibilidad de las dos en el sistema completo). En este marco, mostraremos cómo extraer las ecuaciones de campo para las variables de MS sin necesidad de fijar ningún gauge, y sin tener que apelar a ninguna aproximación semiclásica. En su lugar, emplearemos un ansatz de Born-Oppenheimer e incluiremos una breve discusión sobre su validez. En la última parte de este capítulo, a título de ejemplo, particularizaremos el nuevo formalismo al caso en que consideremos una cuantización de lazos para el espacio-tiempo de fondo, comparando los resultados con los del capítulo precedente.

## 5.2. Formulación invariante de gauge de las perturbaciones

A la luz del discurso anterior, nuestro primer propósito es describir el modelo perturbativo que estamos estudiando en términos de variables invariantes de gauge sin necesidad de fijar previamente ninguna libertad de gauge, y preservando la covariancia del sistema en el nivel de truncamiento de nuestro esquema perturbativo. Con esta finalidad, vamos a centrar toda nuestra atención primero sobre el sector inhomogéneo del espacio de fases, que contiene los grados de libertad de las perturbaciones.

Para implementar nuestra estrategia, resulta conveniente hacer una pequeña revisión del sistema clásico. Tomamos como punto de partida la descripción del modelo de FLRW perturbado que presentamos en la sección 4.2.1. Vamos a introducir, por conveniencia, un reescalado de los modos que desempeñan el papel de multiplicadores de Lagrange, a saber,

$$\tilde{g}_{\vec{n}\epsilon} = e^{-3\alpha} N_0 g_{\vec{n}\epsilon}, \quad \tilde{k}_{\vec{n}\epsilon} = e^{-\alpha} k_{\vec{n}\epsilon}, \tag{5.2.1}$$

de manera que el hamiltoniano total del sistema queda de la forma

$$H = N_0 \Big[ H_{|0} + \sum_{\vec{n},\epsilon} H_{|2}^{\vec{n},\epsilon} \Big] + \sum_{\vec{n},\epsilon} \tilde{g}_{\vec{n},\epsilon} \tilde{H}_{|1}^{\vec{n},\epsilon} + \sum_{\vec{n},\epsilon} \tilde{k}_{\vec{n},\epsilon} \tilde{H}_{\_1}^{\vec{n},\epsilon}, \tag{5.2.2}$$

donde las nuevas ligaduras perturbativas lineales vienen dadas por las ecuaciones (4.2.10) y (4.2.11) reescaladas, esto es, $\tilde{H}_{|1}^{\vec{n},\epsilon} = e^{3\alpha} H_{|1}^{\vec{n},\epsilon}$ y $\tilde{H}_{\_1}^{\vec{n},\epsilon} = e^{\alpha} H_{\_1}^{\vec{n},\epsilon}$, mientras que $H_{|0}$ y $H_{|2}^{\vec{n},\epsilon}$ corresponden exactamente a las expresiones dadas en (4.2.8) y (4.2.9), respectivamente.

De esta forma, recordemos, los grados de libertad que parametrizan las perturbaciones quedan caracterizados por los coeficientes de Fourier $\{X_l^{\vec{n},\epsilon}\} := \{a_{\vec{n},\epsilon}, b_{\vec{n},\epsilon}, f_{\vec{n},\epsilon}\}$, junto con sus correspondientes momentos canónicamente conjugados $\{X_{p_l}^{\vec{n},\epsilon}\}$, donde $l$ toma valores del 1 al 3. Tal y como hemos avanzado, introduciremos una transformación canónica para describir estas perturbaciones en términos de las variables de MS, dos combinaciones convenientes de las ligaduras perturbativas lineales, y sus respectivos pares canónicos definidos de manera apropiada. Puesto que nuestro planteamiento pasa por respetar la estructura canónica del conjunto de las variables fundamentales utilizadas para describir las perturbaciones, necesitaremos encontrar, en particular, combinaciones de las ligaduras lineales que conmuten. Por ello, un paso fundamenta del proceso consiste en abelianizar el álgebra de ligaduras perturbativas. Una vez alcanzado este punto, veremos que, por el hecho de que las variables de MS son invariantes de gauge, y por tanto conmutan con las ligaduras perturbativas, resulta natural incluirlas junto a las ligaduras perturbativas abelianizadas para alcanzar un conjunto completo de variables compatibles en el sector inhomogéneo. Luego, siguiendo los mismos pasos que en el capítulo anterior, plantearemos una transformación canónica íntegra de nuestro sistema total, esto es, considerando no sólo las inhomogeneidades, sino también el sector homogéneo del espacio de fases, parametrizado por las variables canónicas para los modos cero $\{\alpha, \ {}_{\alpha}, \varphi, \ {}_{\varphi}\}$. El hamiltoniano resultante será una combinación lineal de ligaduras, que no sólo serán de primera clase (como es habitual), sino que además formarán un álgebra abeliana.

Dado que en esta sección vamos a interesarnos únicamente en la transformación canónica del sector inhomogéneo de nuestro sistema y en la estructura simpléctica inducido en él, consideraremos de forma transitoria que el sector homogéneo es un fondo fijo. Con este propósito, y sólo en este sentido, podremos ignorar por el momento los corchetes de Poisson de las variables correspondientes a los modos cero (tanto entre ellos, como con las perturbaciones). Así pues, en esta sección operaremos con los corchetes de Poisson para el sector inhomogéneo definidos como

$$\{F, G\}_{(P)} := \sum_{l,\vec{n},\epsilon} \left( \frac{\partial F}{\partial X_{l}^{\vec{n},\epsilon}} \frac{\partial G}{\partial X_{p_l}^{\vec{n},\epsilon}} - \frac{\partial F}{\partial X_{p_l}^{\vec{n},\epsilon}} \frac{\partial G}{\partial X_{l}^{\vec{n},\epsilon}} \right), \tag{5.2.3}$$

donde $F$ y $G$ son funciones de las perturbaciones, y podrían depender también de las variables del fondo.

### 5.2.1. Transformación canónica para las perturbaciones

En el capítulo anterior introdujimos las variables de MS como una combinación entre ciertas variables de configuración de las perturbaciones materiales y de la métrica [véase la ecuación (4.2.17)]. También es fácil comprobar a partir de dicha expresión que estos modos son invariantes de gauge, ya que conmutan con las ligaduras perturbativas.

Como consecuencia, parece natural intentar modificar la descripción de los modos inhomogéneos considerando combinaciones de las ligaduras perturbativas lineales, tal que todos los elementos empleados conmuten entre sí y puedan adoptarse como un conjunto completo variables compatibles. Además, de esta forma, la información sobre las ligaduras se incorporaría de manera directa en nuestro sistema en términos de variables fundamentales y, en particular, imponer estas ligaduras en la teoría cuántica sería una tarea sencilla. El hecho de que queramos definir dos variables compatibles a partir de las ligaduras perturbativas lineales requiere, como ya hemos comentado, la abelianización del álgebra de dichas ligaduras (y a posteriori, como veremos, del álgebra completa de ligaduras del modelo de FLRW perturbado). Con esto en mente, hacemos notar que el corchete de Poisson entre ellas es $\{\tilde{H}_{\_1}^{\vec{n},\epsilon}, \tilde{H}_{|1}^{\vec{n},\epsilon}\}_{(P)} = e^{3\alpha} H_{|0}$. De este modo, será sencillo abelianizar su álgebra: sólo necesitamos reemplazar $\tilde{H}_{|1}^{\vec{n},\epsilon}$ por la combinación

$$\begin{aligned} \breve{H}_{|1}^{\vec{n},\epsilon} &= \tilde{H}_{|1}^{\vec{n},\epsilon} - 3e^{3\alpha} H_{|0} a_{\vec{n},\epsilon} \\ &= - {}_{\alpha} \; {}_{a_{\vec{n},\epsilon}} + {}_{\varphi} \; {}_{f_{\vec{n},\epsilon}} + \left( {}_{\alpha}^{2} - 3 \; {}_{\varphi}^{2} - \tfrac{1}{3}\omega_n^2 e^{4\alpha} \right) a_{\vec{n},\epsilon} - \tfrac{1}{3}\omega_n^2 e^{4\alpha} b_{\vec{n},\epsilon} + e^{6\alpha} \tilde{m}^2 \varphi f_{\vec{n},\epsilon}. \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

A simple vista, este cambio conlleva una redefinición del modo cero de la función lapso. Concretamente, podremos reescribir el hamiltoniano (5.2.2) como

$$H = \breve{N}_0 \Big[ H_{|0} + \sum_{\vec{n},\epsilon} H_{|2}^{\vec{n},\epsilon} \Big] + \sum_{\vec{n},\epsilon} g_{\vec{n},\epsilon} \breve{H}_{|1}^{\vec{n},\epsilon} + \sum_{\vec{n},\epsilon} k_{\vec{n},\epsilon} \tilde{H}_{\_1}^{\vec{n},\epsilon}, \tag{5.2.5}$$

donde el nuevo modo cero de la función lapso ha adquirido contribuciones cuadráticas de las inhomogeneidades:

$$\breve{N}_0 = N_0 + 3e^{3\alpha} \sum_{\vec{n},\epsilon} g_{\vec{n},\epsilon} a_{\vec{n},\epsilon}. \tag{5.2.6}$$

Confirmamos que las variables de MS, $v_{\vec{n},\epsilon}$, continúan siendo invariantes respecto a este nuevo conjunto de ligaduras. En pocas palabras, el conjunto $\{v_{\vec{n},\epsilon}, \breve{H}^{\vec{n},\epsilon}_{|1}, \tilde{H}^{\vec{n},\epsilon}_{\_1}\}$ proporciona una nueva parametrización del espacio de configuración de las inhomogeneidades (en tanto y cuanto las variables son compatibles) en términos de ligaduras e invariantes de gauge, tal y como deseabamos.

Ahora completamos la transformación canónica en el sector inhomogéneo determinando las variables canónicamente conjugadas a este nuevo conjunto. Es sencillo comprobar que

$$C^{\vec{n},\epsilon}_{\_1} = 3b_{\vec{n},\epsilon} \tag{5.2.7}$$

es canónicamente conjugado a $\tilde{H}^{\vec{n},\epsilon}_{\_1}$, es decir, $\{C^{\vec{n},\epsilon}_{\_1}, \tilde{H}^{\vec{n},\epsilon}_{\_1}\}_{(P)} = 1$, a la vez que conmuta con $v_{\vec{n}',\epsilon'}$ y $\breve{H}^{\vec{n}',\epsilon'}_{|1}$. Encontrar el resto de variables canónicas requiere un poco más de trabajo. Sin detallar aquí el cálculo explícito, simplemente exponemos que

$$C^{\vec{n},\epsilon}_{|1} = -\frac{1}{\alpha}(a_{\vec{n},\epsilon} + b_{\vec{n},\epsilon}) \tag{5.2.8}$$

es la variable canónicamente conjugada a la ligadura $\breve{H}^{\vec{n},\epsilon}_{|1}$, con $\{C^{\vec{n},\epsilon}_{|1}, \breve{H}^{\vec{n},\epsilon}_{|1}\}_{(P)} = 1$, mientras que

$$ {}_{v_{\vec{n},\epsilon}} = e^{-\alpha}\left[ \ {}_{f_{\vec{n},\epsilon}} + \frac{1}{\ {}_{\varphi}}\left(e^{6\alpha}\tilde{m}^2\varphi f_{\vec{n},\epsilon} + 3\ {}^2_{\varphi} b_{\vec{n},\epsilon}\right)\right] \tag{5.2.9}$$

es el momento conjugado de la variable de MS, de manera que $\{v_{\vec{n},\epsilon},\ {}_{v_{\vec{n},\epsilon}}\}_{(P)} = 1$.

Asignaremos el papel de variables de configuración a $C^{\vec{n},\epsilon}_{\_1}$ y $C^{\vec{n},\epsilon}_{|1}$, por conveniencia, y consideraremos las ligaduras $\tilde{H}^{\vec{n},\epsilon}_{\_1}$ y $\breve{H}^{\vec{n},\epsilon}_{|1}$ como sus momentos asociados. Es fácil darse cuenta de que esta elección simplificará la discusión en el momento de imponer las ligaduras perturbativas siguiendo el programa de Dirac durante la cuantización del sistema. Además, vamos a introducir una notación más compacta para el nuevo conjunto de variables canónicas para las perturbaciones, a saber,

$$\begin{aligned} \{\ {}^{\vec{n},\epsilon}_{l}\} &:= \{v_{\vec{n},\epsilon}, C^{\vec{n},\epsilon}_{|1}, C^{\vec{n},\epsilon}_{\_1}\}, & (5.2.10)\\ \{\ {}^{\vec{n},\epsilon}_{p_l}\} &:= \{\ {}_{v_{\vec{n},\epsilon}}, \breve{H}^{\vec{n},\epsilon}_{|1}, \tilde{H}^{\vec{n},\epsilon}_{\_1}\}. & (5.2.11)\end{aligned}$$

De esta forma, nuestras variables de configuración originales $X^{\vec{n},\epsilon}_{l}$ y las nuevas ${}^{\vec{n},\epsilon}_{l}$ estarán relacionadas mediante una transformación de contacto.

### 5.2.2. Redefinición del momento de Mukhanov-Sasaki

En la sección 5.4, siguiendo los métodos de cuantización híbrida, introduciremos una representación de Fock para las perturbaciones, y en particular para la variable de MS. Si uno reduce el sistema clásicamente, de manera que se ajuste a un modelo en Teoría Cuántica de Campos en un fondo curvo, el campo de MS resultante obedece una ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar con masa (dependiente del tiempo) que se propaga en un espacio-tiempo ultraestático con una topología espacial compacta plana. De nuevo, para poder introducir los resultados de unicidad que detallamos en el primer capítulo, necesitamos hacer una elección específica del momento conjugado para la variable de MS, tal que la evolución pueda ser implementada de manera unitaria. Concretamente, los modos de MS deben satisfacer la ecuación de movimiento

$$\dot{v}_{\vec{n},\epsilon} = \;{}_{v_{\vec{n},\epsilon}} \tag{5.2.12}$$

al orden perturbativo considerado. Como es habitual, el punto denota aquí la derivada con respecto a la coordenada temporal $t$. Puesto que las ecuaciones de evolución se deducen a partir del hamiltoniano del sistema y las variables de MS conmutan con las ligaduras lineales, no es difícil convencerse de que la condición anterior sobre la elección de momento se alcanza únicamente si el modo cero de la ligadura hamiltoniana, que contiene contribuciones cuadráticas de las perturbaciones, no incluye ningún término lineal en el momento de MS.[9]

A la luz de estos comentarios, vamos a modificar los modos de momento ${}_{v_{\vec{n},\epsilon}}$ haciendo uso de la libertad que tenemos para añadir un término lineal en la variable de configuración $v_{\vec{n},\epsilon}$. Así pues, introducimos un cambio de la forma

$${}_{v_{\vec{n},\epsilon}} \to \breve{\;}_{v_{\vec{n},\epsilon}} = \;{}_{v_{\vec{n},\epsilon}} + F v_{\vec{n},\epsilon}, \tag{5.2.13}$$

donde $F$ es una función de las variables homogéneas que determinaremos apelando a la condición (5.2.12). Huelga decir que, el nuevo conjunto $\{\breve{\;}^{\vec{n},\epsilon}_{p_l}\} := \{\breve{\;}_{v_{\vec{n},\epsilon}}, \breve{H}^{\vec{n},\epsilon}_{|1}, \tilde{H}^{\vec{n},\epsilon}_{\_1}\}$ por construcción, todavía proporciona un conjunto canónico junto con $\{\;{}^{\vec{n},\epsilon}_{l}\}$.

Para encontrar la expresión explícita de la función $F$ procederemos como sigue. Por un momento, adoptamos el gauge longitudinal, que analizamos en el capítulo anterior, y que introduce las condiciones $b_{\vec{n},\epsilon} = 0$ y ${}_{a_{\vec{n},\epsilon}} = \;{}_{\alpha} a_{\vec{n},\epsilon} + 3\;{}_{\varphi} f_{\vec{n},\epsilon}$. Hacemos coincidir el momento de MS resultante al incorporar aquí estas condiciones de gauge con el que obtuvimos en la sección 4.2.3. Este procedimiento establece un único momento posible, que está bien determinado, basándonos en la consistencia de nuestros cálculos. Además, la función $F$ resulta

[9] En realidad, la condición no sólo es necesaria, sino también suficiente.

ser independiente del modo analizado, tal y como esperábamos,

$$F = -e^{-2\alpha}\left(\frac{1}{\varphi}e^{6\alpha}\tilde{m}^2\varphi + \quad_{\alpha} + 3\frac{^2_{\varphi}}{\alpha}\right). \tag{5.2.14}$$

Así, los modos para el nuevo momento conjugado de MS son

$$\begin{aligned} \breve{}_{v_{\vec{n},\epsilon}} = &\ e^{-\alpha}\left[\quad_{f_{\vec{n},\epsilon}} + \frac{1}{\varphi}\left(e^{6\alpha}\tilde{m}^2\varphi f_{\vec{n},\epsilon} + 3\ ^2_{\varphi}b_{\vec{n},\epsilon}\right)\right] \\ &-e^{-2\alpha}\left(\frac{1}{\varphi}e^{6\alpha}\tilde{m}^2\varphi + \quad_{\alpha} + 3\frac{^2_{\varphi}}{\alpha}\right)v_{\vec{n},\epsilon}. \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

A fin de simplificar la notación, en lo que resta de capítulo usaremos el símbolo $_{v_{\vec{n},\epsilon}}$ para denotar los modos de momento redefinidos y $^{\vec{n},\epsilon}_{p_l}$ para el conjunto correspondiente a los momentos.

### 5.2.3. Inversión de la transformación canónica

Por completitud, y para cerrar esta sección, vamos a facilitar la expresión de las variables perturbativas originales $\{X^{\vec{n},\epsilon}_l\} := \{X^{\vec{n},\epsilon}_l, X^{\vec{n},\epsilon}_{p_l}\}$ en términos de las nuevas variables $\{\ ^{\vec{n},\epsilon}_l\} := \{\ ^{\vec{n},\epsilon}_l,\ ^{\vec{n},\epsilon}_{p_l}\}$. El resultado es

$$a_{\vec{n},\epsilon} = -\quad_{\alpha}\ ^{\vec{n},\epsilon}_2 - \frac{1}{3}\ ^{\vec{n},\epsilon}_3, \tag{5.2.16a}$$

$$b_{\vec{n},\epsilon} = \frac{1}{3}\ ^{\vec{n},\epsilon}_3, \tag{5.2.16b}$$

$$f_{\vec{n},\epsilon} = e^{-\alpha}\ ^{\vec{n},\epsilon}_1 + \quad_{\varphi}\ ^{\vec{n},\epsilon}_2, \tag{5.2.16c}$$

$$\begin{aligned} _{a_{\vec{n},\epsilon}} = &-\frac{1}{\alpha}\ ^{\vec{n},\epsilon}_{p_2} + \frac{\varphi}{\alpha}e^{\alpha}\ ^{\vec{n},\epsilon}_{p_1} + \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}\left(e^{6\alpha}\tilde{m}^2\varphi + \quad_{\varphi}\quad_{\alpha} + 3\frac{^3_{\varphi}}{\alpha}\right)\ ^{\vec{n},\epsilon}_1 \\ &+\left(3\ ^2_{\varphi} + \frac{1}{3}e^{4\alpha}\omega_n^2 - \ ^2_{\alpha}\right)\ ^{\vec{n},\epsilon}_2 - \frac{1}{3}\quad_{\alpha}\ ^{\vec{n},\epsilon}_3, \end{aligned} \tag{5.2.16d}$$

$$\begin{aligned} _{b_{\vec{n},\epsilon}} = &\,3\ ^{\vec{n},\epsilon}_{p_3} - \frac{1}{\alpha}\ ^{\vec{n},\epsilon}_{p_2} + \frac{\varphi}{\alpha}e^{\alpha}\ ^{\vec{n},\epsilon}_{p_1} + \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}\left(e^{6\alpha}\tilde{m}^2\varphi - 2\quad_{\varphi}\quad_{\alpha} + 3\frac{^3_{\varphi}}{\alpha}\right)\ ^{\vec{n},\epsilon}_1 \\ &+\frac{1}{3}e^{4\alpha}\omega_n^2\ ^{\vec{n},\epsilon}_2 - \frac{4}{3}\quad_{\alpha}\ ^{\vec{n},\epsilon}_3, \end{aligned} \tag{5.2.16e}$$

$$_{f_{\vec{n},\epsilon}} = e^{\alpha}\ ^{\vec{n},\epsilon}_{p_1} + e^{-\alpha}\left(\quad_{\alpha} + 3\frac{^2_{\varphi}}{\alpha}\right)\ ^{\vec{n},\epsilon}_1 - e^{6\alpha}\tilde{m}^2\varphi V^{\vec{n},\epsilon}_2 - \quad_{\varphi}\ ^{\vec{n},\epsilon}_3. \tag{5.2.16f}$$

## 5.3. Espacio de fases canónico completo

A continuación, vamos a completar la transformación canónica, incluyendo las variables de los modos cero, para recuperar una estructura simpléctica canónica para nuestro sistema completo.

### 5.3.1. Transformación canónica de los modos cero

La acción de nuestro sistema (truncado a orden cuadrático en perturbaciones) en términos de la parametrización original del sector inhomogéneo tiene la forma

$$S = \int \mathrm{d}t \left[ \sum_a \dot{w}^a w_p^a + \sum_{l,\vec{n},\epsilon} \dot{X}_l^{\vec{n},\epsilon} X_{p_l}^{\vec{n},\epsilon} + H(w^a, X_l^{\vec{n},\epsilon}) \right], \qquad (5.3.1)$$

salvo posibles términos de superficie irrelevantes para nuestra discusión. En esta expresión, $H(w^a, X_l^{\vec{n},\epsilon})$ es el hamiltoniano total en términos de las variables originales, $\{w^a\} := \{w^a, w_p^a\}$ y $\{X_l^{\vec{n},\epsilon}\} := \{X_l^{\vec{n},\epsilon}, X_{p_l}^{\vec{n},\epsilon}\}$. Vamos a centrarnos en el término de Legendre que contiene la información sobre la estructura simpléctica del sistema completo, que llamaremos $Z$,

$$Z = \int \mathrm{d}t \left[ \sum_a \dot{w}^a w_p^a + \sum_{l,\vec{n},\epsilon} \dot{X}_l^{\vec{n},\epsilon} X_{p_l}^{\vec{n},\epsilon} \right]. \qquad (5.3.2)$$

Nuestro propósito es encontrar una transformación canónica que relacione estas variables con los nuevos modos cero $\tilde{w}^a := (\tilde{w}^a, \tilde{w}_p^a)$ de forma que $Z$ conserve su forma canónica cuando se exprese en términos de los invariantes de gauge para las perturbaciones, es decir

$$Z = \int \mathrm{d}t \left[ \sum_a \dot{\tilde{w}}^a \tilde{w}_p^a + \sum_{l,\vec{n},\epsilon} \dot{\ }_l^{\vec{n},\epsilon} \ _{p_l}^{\vec{n},\epsilon} \right]. \qquad (5.3.3)$$

En lugar de reproducir todos los detalles del extenso cálculo que nos permite deducir la forma que tiene la transformación deseada, vamos a dar un esbozo de los pasos más importantes de la deducción, análogos a los de la sección 4.2.3. Esencialmente se basa en considerar nuestro cambio de variables perturbativas como una transformación canónica en el sector inhomogéneo que depende de una serie de variables externas dependientes del tiempo, que describen los grados de libertad homogéneos. Primero, hacemos notar que las relaciones $X_l^{\vec{n},\epsilon} = X_l^{\vec{n},\epsilon}(\ _m^{\vec{n},\epsilon})$ dadas por las ecuaciones (5.2.16) son lineales y no mezclan diferentes modos. Por tanto, las variables originales $X_l^{\vec{n},\epsilon}$ se pueden expresar como

$$X_l^{\vec{n},\epsilon} = \sum_m \left( \frac{\partial X_l^{\vec{n},\epsilon}}{\partial \ _m^{\vec{n},\epsilon}} \ _m^{\vec{n},\epsilon} + \frac{\partial X_l^{\vec{n},\epsilon}}{\partial \ _{p_m}^{\vec{n},\epsilon}} \ _{p_m}^{\vec{n},\epsilon} \right), \qquad m = 1, 2, 3, \qquad (5.3.4)$$

donde las derivadas parciales son funciones de los modos cero $w^a$ y la frecuencia $\omega_n$ solamente. Teniendo en cuenta esta relación en las derivadas respecto al tiempo que aparecen en $Z$, realizando varias integraciones por partes, despreciando derivadas totales que contribuyen con términos de superficie a tiempos iniciales y finales (asumiendo un principio variacional bien planteado para el sistema), y truncando a orden cuadrático en perturbaciones, así como recordando que $\{ {}_l^{\vec{n},\epsilon}\}$ es un conjunto canónico siempre y cuando uno ignore el sector homogéneo, uno puede obtener la expresión de las nuevas variables canónicas homogéneas $\tilde{w}^a$ en función de las originales $w^a$ y de las nuevas variables perturbativas ${}_l^{\vec{n},\epsilon}$ (o de $X_l^{\vec{n},\epsilon}$ si se prefiere). Este resultado es invertible al orden perturbativo que consideramos aquí, permitiéndonos expresar las variables originales como funciones de las nuevas variables para el espacio de fases completo del sistema (modos cero más inhomogeneidades). Siguiendo este procedimiento, uno llega a

$$w^a = \tilde{w}^a - \frac{1}{2}\sum_{l,\vec{n},\epsilon}\left[X_l^{\vec{n},\epsilon}\frac{\partial X_{p_l}^{\vec{n},\epsilon}}{\partial \tilde{w}_p^a} - \frac{\partial X_l^{\vec{n},\epsilon}}{\partial \tilde{w}_p^a}X_{p_l}^{\vec{n},\epsilon}\right], \tag{5.3.5a}$$

$$w_p^a = \tilde{w}_p^a + \frac{1}{2}\sum_{l,\vec{n},\epsilon}\left[X_l^{\vec{n},\epsilon}\frac{\partial X_{p_l}^{\vec{n},\epsilon}}{\partial \tilde{w}^a} - \frac{\partial X_l^{\vec{n},\epsilon}}{\partial \tilde{w}^a}X_{p_l}^{\vec{n},\epsilon}\right]. \tag{5.3.5b}$$

En primer lugar, queremos subrayar el patente paralelismo entre estas expresiones y las dadas en (4.2.22). Evidentemente, las relaciones que hemos obtenido aquí son una generalización de las anteriores al aumentar el número de variables que entran en juego en la transformación. De nuevo, tenemos que ver las variables originales $X_l^{\vec{n},\epsilon}$ para las perturbaciones como funciones de las nuevas ${}_l^{\vec{n},\epsilon}$, dadas por las ecuaciones (5.2.16), reemplazando $\{w^a\}$ por $\{\tilde{w}^a\}$ en dichas ecuaciones. Nótese que esta sustitución es consistente con nuestro esquema de truncamiento, puesto que los modos cero originales y los nuevos difieren precisamente en términos que son cuadráticos en perturbaciones. En este sentido, debemos comentar que las derivadas parciales que aparecen arriba deben tomarse considerando ${}_l^{\vec{n},\epsilon}$ constantes. En el apéndice A damos las expresiones explícitas de los modos cero $w^a$ en términos de las nuevas variables para el espacio de fases $\tilde{w}^a$ y ${}_l^{\vec{n},\epsilon}$.

## 5.3.2. Hamiltoniano en términos de invariantes de gauge

Una vez resuelta explícitamente la transformación que relaciona la parametrización original, $\{w^a, X_l^{\vec{n},\epsilon}\}$, con la nueva formulación con invariantes de gauge para las perturbaciones, $\{\tilde{w}^a, {}_l^{\vec{n},\epsilon}\}$, podemos obtener la forma del hamiltoniano en la nueva formulación. En particular, vamos a considerar el modo cero de la ligadura hamiltoniana. En las variables originales, éste venía dado en la ecuación (5.2.5) por la suma

$$H_{|0}(w^a) + \sum_{\vec{n},\epsilon} H_{|2}^{\vec{n},\epsilon}\left(w^a, X_l^{\vec{n},\epsilon}\right), \tag{5.3.6}$$

que contiene la contribución del modelo de FLRW homogéneo y la corrección cuadrática de las perturbaciones.

Como ya hemos visto que la diferencia entre las variables homogéneas originales y las nuevas es precisamente de orden cuadrático en las perturbaciones, la sustitución en el modo cero de la ligadura hamiltoniana nos lleva a la siguiente expresión

$$H_{|0}(\tilde{w}^a) + \sum_b \left(w^b - \tilde{w}^b\right)\frac{\partial H_{|0}}{\partial \tilde{w}^b}(\tilde{w}^a) + \sum_{\vec{n},\epsilon} H_{|2}^{\vec{n},\epsilon}\left[\tilde{w}^a, X_l^{\vec{n},\epsilon}(\tilde{w}^a, \;{}_l^{\vec{n},\epsilon})\right], \tag{5.3.7}$$

donde la diferencia $w^a - \tilde{w}^a$ debe ser vista como una función de las nuevas variables del espacio de fases, dada por los últimos términos en las dos expresiones (5.3.5a) y (5.3.5b). Esta diferencia es una suma de contribuciones independientes de cada uno de los modos inhomogéneos, de manera que podemos escribir

$$w^a - \tilde{w}^a := \sum_{\vec{n},\epsilon} \Delta\tilde{w}^a_{\vec{n},\epsilon}. \tag{5.3.8}$$

Además, la evaluación de $H_{|0}$ y $H_{|2}^{\vec{n},\epsilon}$ en las nuevas variables homogéneas $\tilde{w}^a$ se ha hecho en la ecuación (5.3.7) simplemente reemplazando las coordenadas originales $w^a$ por las nuevas en la dependencia funcional de las contribuciones consideradas en la ligadura. Para deducir la expresión anterior, basta con expandir $H_{|0}$ en serie entorno a las nuevas variables de modo cero y recordar que truncamos el hamiltoniano total a segundo orden en perturbaciones. A partir de estas consideraciones, vemos que la contribución cuadrática de las perturbaciones al modo cero de la ligadura hamiltoniana en nuestras nuevas variables toma la forma $\sum_{\vec{n},\epsilon} \tilde{H}_{|2}^{\vec{n},\epsilon}$, con

$$\tilde{H}_{|2}^{\vec{n},\epsilon} = H_{|2}^{\vec{n},\epsilon} + \sum_a \Delta\tilde{w}^a_{\vec{n},\epsilon}\frac{\partial H_{|0}}{\partial \tilde{w}^a}. \tag{5.3.9}$$

Ésta es la forma que uno esperaría si ve el cambio de variables para las perturbaciones como una transformación canónica que depende de una serie de variables externas dependientes del tiempo, cuya dinámica está gobernada por el hamiltoniano $H_{|0}$ [159].

Haciendo el cálculo explícito, llegamos a la siguiente expresión:

$$\tilde{H}_{|2}^{\vec{n},\epsilon} = \breve{H}_{|2}^{\vec{n},\epsilon} + F_{|2}^{\vec{n},\epsilon} H_{|0} + F_{|1}^{\vec{n},\epsilon} \;{}_{p_2}^{\vec{n},\epsilon} + \left(F_{\_1}^{\vec{n},\epsilon} - 3\frac{e^{-3\tilde{\alpha}}}{\;\;{}_{\tilde{\alpha}}} \;{}_{p_2}^{\vec{n},\epsilon} + \frac{9}{2}e^{-3\tilde{\alpha}} \;{}_{p_3}^{\vec{n},\epsilon}\right) \;{}_{p_3}^{\vec{n},\epsilon}. \tag{5.3.10}$$

donde hemos definido

$$\breve{H}_{|2}^{\vec{n},\epsilon} = \frac{e^{-\tilde{\alpha}}}{2}\left[\omega_n^2 + e^{-4\tilde{\alpha}} \;{}_{\tilde{\alpha}}^{2} + \tilde{m}^2 e^{2\tilde{\alpha}}\left(1 + 15\tilde{\varphi}^2 - 12\tilde{\varphi}\frac{\;{}_{\tilde{\varphi}}}{\;{}_{\tilde{\alpha}}} - 18e^{6\tilde{\alpha}}\tilde{m}^2\frac{\tilde{\varphi}^4}{\;{}_{\tilde{\alpha}}^{2}}\right)\right]( \;{}_{1}^{\vec{n},\epsilon})^2$$

$$+\frac{e^{-\tilde{\alpha}}}{2}(\ {}^{\vec{n},\epsilon}_{p_1})^2, \tag{5.3.11a}$$

$$F^{\vec{n},\epsilon}_{|2} = \frac{3}{2}e^{-2\tilde{\alpha}}\left(1-9\frac{{}^{2}_{\tilde{\varphi}}}{{}^{2}_{\tilde{\alpha}}}+12e^{6\tilde{\alpha}}\tilde{m}^2\frac{\tilde{\varphi}^2}{{}^{2}_{\tilde{\alpha}}}\right)(\ {}^{\vec{n},\epsilon}_{1})^2+\frac{1}{2}e^{-2\tilde{\alpha}}\left(e^{4\tilde{\alpha}}\omega_n^2-9\ {}^{2}_{\tilde{\varphi}}\right)(\ {}^{\vec{n},\epsilon}_{2})^2$$

$$-3\frac{e^{-2\tilde{\alpha}}}{{}^{2}_{\tilde{\alpha}}}\left[\left(\ {}^{2}_{\tilde{\alpha}}+3\ {}^{2}_{\tilde{\varphi}}\right)\ {}_{\tilde{\varphi}}+e^{6\tilde{\alpha}}\tilde{m}^2\tilde{\varphi}\ {}_{\tilde{\alpha}}\right]\ {}^{\vec{n},\epsilon}_{1}\ {}^{\vec{n},\epsilon}_{2}-3\frac{\ {}_{\tilde{\varphi}}}{\ {}_{\tilde{\alpha}}}\ {}^{\vec{n},\epsilon}_{p_1}\ {}^{\vec{n},\epsilon}_{2}, \tag{5.3.11b}$$

$$F^{\vec{n},\epsilon}_{|1} = \frac{1}{2}\frac{e^{-4\tilde{\alpha}}}{\ {}_{\tilde{\alpha}}}\left[6\ {}_{\tilde{\varphi}}\ {}^{\vec{n},\epsilon}_{1}+\left(6e^{3\tilde{\alpha}}H_{|0}+5\ {}^{2}_{\tilde{\alpha}}\right)\ {}^{\vec{n},\epsilon}_{2}\right], \tag{5.3.11c}$$

$$F^{\vec{n},\epsilon}_{\_1} = 3\frac{e^{-4\tilde{\alpha}}}{{}^{2}_{\tilde{\alpha}}}\left(e^{6\tilde{\alpha}}\tilde{m}^2\tilde{\varphi}\pi_{\tilde{\alpha}}+3\ {}^{3}_{\tilde{\varphi}}-2\ {}^{2}_{\tilde{\alpha}}\ {}_{\tilde{\varphi}}\right)\ {}^{\vec{n},\epsilon}_{1}+\omega_n^2\ {}^{\vec{n},\epsilon}_{2}-\frac{3}{2}e^{-6\tilde{\alpha}}\ {}_{\tilde{\alpha}}\ {}^{\vec{n},\epsilon}_{3}$$

$$-3e^{-2\tilde{\alpha}}\frac{\ {}_{\tilde{\varphi}}}{\ {}_{\tilde{\alpha}}}\ {}^{\vec{n},\epsilon}_{p_1}. \tag{5.3.11d}$$

En el hamiltoniano total, podemos dar cuenta del término $\sum_{\vec{n},\epsilon} F^{\vec{n},\epsilon}_{|2} H_{|0}$ mediante una nueva redefinición del modo cero de la función lapso, dada por $\bar{N}_0 = \breve{N}_0(1 + \sum_{\vec{n},\epsilon} F^{\vec{n},\epsilon}_{|2})$ [véase la ecuación (5.2.6)]. Los otros términos en la ecuación (5.3.10) diferentes de $\breve{H}^{\vec{n},\epsilon}_{|2}$ contribuyen a las ligaduras perturbativas lineales, y su presencia conlleva una redefinición de los multiplicadores de Lagrange correspondientes, que a partir de ahora denotaremos $G_{\vec{n},\epsilon}$ y $K_{\vec{n},\epsilon}$. Resumiendo, la ligadura Hamiltoniana total a segundo orden que obtenemos toma la forma

$$H = \bar{N}_0\Big[H_{|0} + \sum_{\vec{n},\epsilon} \breve{H}^{\vec{n},\epsilon}_{|2}\Big] + \sum_{\vec{n},\epsilon} G_{\vec{n},\epsilon}\ {}^{\vec{n},\epsilon}_{p_2} + \sum_{\vec{n},\epsilon} K_{\vec{n},\epsilon}\ {}^{\vec{n},\epsilon}_{p_3}. \tag{5.3.12}$$

En el apéndice A damos las expresiones explícitas de las funciones lapso original $N$ y del covector desplazamiento $N_i$ en términos de las nuevas variables del espacio de fases $\{\tilde{w}^a,\ {}^{\vec{n},\epsilon}_{l}\}$, así como de los multiplicadores de Lagrange $\{\bar{N}_0, G_{\vec{n},\epsilon}, K_{\vec{n},\epsilon}\}$.

Los términos $\breve{H}^{\vec{n},\epsilon}_{|2}$ proporcionan finalmente las contribuciones cuadráticas en las perturbaciones al modo cero de la ligadura hamiltoniana en la formulación invariante de gauge. Tal y como esperábamos, estos términos son precisamente aquéllos que dependen exclusivamente de las variables de MS y sus momentos, y por tanto son cantidades invariantes de gauge. Por razones obvias, llamaremos a esta suma el hamiltoniano de MS. Además, como ya habíamos anticipado, estos términos no contienen contribuciones lineales del momento de MS. De hecho, la única contribución de éste es cuadrática, y su coeficiente es una constante salvo una potencia del factor de escala. Hacemos notar también que la expresión dada por $\breve{H}^{\vec{n},\epsilon}_{|2}$ es lineal en el momento del modo cero del campo escalar, $\ {}_{\tilde{\varphi}}$. Para obtener esta expresión, se ha utilizado convenientemente la identidad $\ {}^{2}_{\varphi} = 2H_{|0}e^{3\alpha} + \ {}^{2}_{\alpha} - e^{6\alpha}\tilde{m}^2\varphi^2$, que se puede usar en la ecuación (5.3.10) a costa de redefinir el modo cero de la función lapso. Gracias a esto, en la sección 5.4 podremos interpretar el modo cero de la ligadura hamiltoniana en cierta aproximación como una ecuación de Schrödinger que dicta la evolución cuántica de las inhomogeneidades en una familia particular de estados.

## 5.4. Cuantización híbrida generalizada y aproximación de Born-Oppenheimer

En esta sección vamos a presentar la cuantización de la variedad simpléctica que describe nuestro sistema cosmológico siguiendo un procedimiento idéntico al que describimos en el capítulo anterior, pero manteniendo una discusión más general, sin especificar la cuantización concreta para el sector homogéneo. Impondremos las ligaduras clásicas de acuerdo con el método de Dirac, es decir, como operadores que aniquilan los estados físicos en la teoría cuántica.

Concretamente, asumiremos que la cuantización de las variables homogéneas proporciona una representación para las relaciones de conmutación canónica tal que los operadores para la geometría de FLRW homogénea conmutan con aquéllos que representan el sector homogéneo del campo material, y, además, todos ellos conmutan con los operadores que representan las inhomogeneidades. Denotamos $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}} \otimes \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{matt}}$ al espacio de Hilbert cinemático para el sector homogéneo, de manera que los operadores geométricos están definidos sobre $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$, mientras que los operadores para el sector material están definidos sobre $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{matt}}$.

Por otro lado, para los modos inhomogéneos descritos por los invariantes de MS, adoptaremos una representación de Fock equivalente a la que presentamos en la sección 4.3, seleccionada por los criterios que establecimos en la primera parte de esta memoria: a) invariancia del vacío bajo las isometrías espaciales, y b) unitariedad de la dinámica en el régimen en que uno recupera una Teoría Cuántica de Campos en un fondo curvo para el campo de MS. Como ya hemos mencionado en repetidas ocasiones, estas pautas eliminan toda la ambigüedad en el posible reescalado de los modos de MS a través de funciones de las variables homogéneas, y seleccionan una familia de representaciones de Fock que son unitariamente equivalentes entre sí. En particular, dicha familia contiene la representación para la cual las variables de aniquilación, $a_{\vec{n},\epsilon}$, y las de creación, $a^{\dagger}_{\vec{n},\epsilon}$, son aquéllas que están asociadas de manera natural con los osciladores harmónicos de frecuencia $\omega_n$. Escogemos, pues, esta particular representación para los modos de MS, y denominamos por $\hat{a}_{\vec{n},\epsilon}$ y $\hat{a}^{\dagger}_{\vec{n},\epsilon}$ a los correspondientes operadores de aniquilación y creación, actuando sobre el espacio de Fock $\mathcal{F}$, tal que $[\hat{a}_{\vec{n},\epsilon}, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{n}',\epsilon'}] = \delta^{\vec{n}',\epsilon'}_{\vec{n},\epsilon}$ (remitimos a la sección 4.3).

Podemos decir que este análisis generaliza el tratamiento cuántico que se presentó en el capítulo anterior en dos sentidos: a) en lugar de reducir el sistema clásicamente, llevamos las ligaduras perturbativas lineales a la teoría cuántica, sin fijar el gauge previamente; y b) no adoptamos una representación concreta para el sector homogéneo, y en particular para la geometría FLRW. A este respecto, dejamos la libertad para adaptar el formalismo a cualquier propuesta de gravedad cuántica para la cosmología de FLRW. La física que se extraiga de cada propuesta específica deberá discutirse llegado el momento.

### 5.4.1. Representación cuántica de las ligaduras

En la nueva formulación invariante de gauge, las ligaduras clásicas conmutan, y por tanto se pueden llevar a la teoría cuántica sin problemas siempre y cuando sus análogos cuánticos respeten estas relaciones de conmutación. Asumimos, pues, que nuestra cuantización satisface esta propiedad y las imponemos de manera independiente.

Vamos a empezar por las ligaduras perturbativas lineales, que clásicamente son ${}^{\vec{n},\epsilon}_{p_{\tilde{l}}} = 0$ (con $\tilde{l} = 2, 3$). Para ello, adoptamos una cuantización para el sector inhomogéneo tal que cada uno de los operadores que representan a las variables de momento actúan como derivadas con respecto a sus variables de configuración correspondientes. De este modo, la condición impuesta por las ligaduras nos dice que los estados físicos son independientes de dichas variables, ${}^{\vec{n},\epsilon}_{\tilde{l}}$, y, por tanto, podemos restringir nuestra discusión a un espacio de representación de la forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\text{grav}}_{\text{kin}} \otimes \mathcal{H}^{\text{matt}}_{\text{kin}} \otimes \mathcal{F}$ para estudiar todos los estados cuánticos que serán físicamente relevantes. Es importante enfatizar el hecho de que esta restricción proviene de la propia teoría cuántica, y no es una reducción clásica. No obstante, hacemos notar que estos estados todavía no son totalmente físicos, ya que todavía tenemos que imponer el modo cero de la ligadura hamiltoniana. La complejidad de esta tarea dificulta la labor, por lo que únicamente seremos capaces de proporcionar soluciones aproximadas.

Primero, vamos a centrarnos en su representación cuántica. Recordemos que, clásicamente, la ligadura toma la forma

$$H_{|0} + \breve{H}_{|2} = e^{-3\alpha}\tilde{H} = 0, \tag{5.4.1}$$

con $H_{|0}$ dada en la ecuación (4.2.8) pero evaluada ahora en las variables $(\tilde{\alpha}, {}_{\tilde{\alpha}}, \tilde{\varphi}, {}_{\tilde{\varphi}})$. Por su parte, $\breve{H}_{|2} = \sum_{\vec{n},\epsilon} \breve{H}^{\vec{n},\epsilon}_{|2}$ está definida en la ecuación (5.3.11a). En lo sucesivo, nos centraremos en la ligadura hamiltoniana densitizada[10] $\tilde{H} = 0$.

Antes de continuar, vamos a introducir algunos detalles de notación que nos resultarán más convenientes. Definimos

$$\mathcal{H}^{(2)}_0 = {}^2_{\tilde{\alpha}} - e^{6\tilde{\alpha}}\tilde{m}^2\tilde{\varphi}^2, \tag{5.4.2}$$

de forma que la contribución del sector homogéneo a $\tilde{H}$ es $e^{3\alpha}H_{|0} = \left( {}^2_{\varphi} - \mathcal{H}^{(2)}_0 \right)/2$. Además,

[10]También podríamos escoger trabajar con la ligadura no densitizada y proceder a su densitización en el nivel cuántico.

introducimos las siguientes funciones de los modos cero:

$$
\begin{aligned}
\vartheta &= -12 e^{4\tilde{\alpha}} \tilde{m}^2 \frac{\tilde{\varphi}}{\ _{\tilde{\alpha}}}, && (5.4.3a)\\
\vartheta_e &= e^{2\tilde{\alpha}}, && (5.4.3b)\\
\vartheta_e &= e^{-2\tilde{\alpha}}\ {}^{2}_{\tilde{\alpha}} + \tilde{m}^2 e^{4\tilde{\alpha}} \left( 1 + 15\tilde{\varphi}^2 - 18 e^{6\tilde{\alpha}} \tilde{m}^2 \frac{\tilde{\varphi}^4}{\ ^{2}_{\tilde{\alpha}}} \right) \\
&= e^{-2\tilde{\alpha}} \mathcal{H}_0^{(2)} \left( 19 - 18 \frac{\mathcal{H}_0^{(2)}}{\ ^{2}_{\tilde{\alpha}}} \right) + \tilde{m}^2 e^{4\tilde{\alpha}} \left( 1 - 2\tilde{\varphi}^2 \right), && (5.4.3c)
\end{aligned}
$$

y llamamos

$$
\begin{aligned}
\Theta^{\vec{n},\epsilon} &= -\vartheta\ (\ {}^{\vec{n},\epsilon}_{1})^2 && (5.4.4a)\\
\Theta_e^{\vec{n},\epsilon} &= -\left[ (\vartheta_e \omega_n^2 + \vartheta_e)(\ {}^{\vec{n},\epsilon}_{1})^2 + \vartheta_e(\ {}^{\vec{n},\epsilon}_{p_1})^2 \right], && (5.4.4b)\\
\Theta &= \sum_{\vec{n},\epsilon} \Theta^{\vec{n},\epsilon}, \qquad \Theta_e = \sum_{\vec{n},\epsilon} \Theta_e^{\vec{n},\epsilon}. && (5.4.4c)
\end{aligned}
$$

De esta manera, $2e^{3\alpha}\breve{H}_{|2} = -(\Theta_e + \Theta\ \ _{\varphi})$. Asumiremos que podemos representar las cantidades introducidas en las ecuaciones (5.4.2) y (5.4.3) como operadores con un dominio denso, $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$, $\hat{\vartheta}$ , $\hat{\vartheta}_e$ y $\hat{\vartheta}_e$, sobre $\mathcal{H}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{grav}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{matt}}$ (y que actúan como la identidad sobre $\mathcal{F}$), y los objetos dados en las ecuaciones (5.4.4) como operadores, $\hat{\Theta}$ y $\hat{\Theta}_e$, con un dominio denso sobre $\mathcal{H}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{grav}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{matt}} \otimes \mathcal{F}$. Así, obtenemos el siguiente operador para $\tilde{H}$:

$$
\hat{\tilde{H}} = \frac{1}{2} \left[ \ \hat{}^{2}_{\tilde{\varphi}} - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - \hat{\Theta}_e - \left( \hat{\Theta}\ \ \hat{}_{\tilde{\varphi}} \right)_{\mathrm{S}} \right], \tag{5.4.5}
$$

donde hemos introducido la simetrización

$$
\left( \hat{\Theta}\ \ \hat{}_{\tilde{\varphi}} \right)_{\mathrm{S}} = \frac{1}{2} \left( \hat{\Theta}\ \ \hat{}_{\tilde{\varphi}} + \ \hat{}_{\tilde{\varphi}} \hat{\Theta}\ \right) = \frac{1}{2} [\ \hat{}_{\tilde{\varphi}}, \hat{\Theta}\ ] + \hat{\Theta}\ \ \hat{}_{\tilde{\varphi}}. \tag{5.4.6}
$$

## 5.4.2. Ansatz de Born-Oppenheimer

Siguiendo la misma linea argumental que detallamos en la sección 4.4, a continuación analizamos las soluciones a la ligadura hamiltoniana que aún persiste en el sistema, adoptando para ello el ansatz

$$
\Psi = \chi(\tilde{\alpha}, \tilde{\varphi})\ \ (\mathcal{N}, \tilde{\varphi}). \tag{5.4.7}
$$

De nuevo, la dependencia en las variables de MS se especifica con la etiqueta $\mathcal{N}$ del número de ocupación de los estados para el sector inhomogéneo, y $\tilde{\alpha}$ denota la dependencia en la geometría del sector FLRW homogéneo[11]. De esta forma, la función de onda $\Psi$ se puede separar en dos factores, uno que depende de los grados de libertad homogéneos de la geometría, y otro de los modos de MS invariantes. Recordamos que este ansatz da cuenta de estados cuánticos que presentan diferentes ritmos de variación en estos dos sectores con respecto al modo cero $\tilde{\varphi}$ del campo escalar, y, como ya hemos podido comprobar, cuando esto ocurre la ligadura Hamiltoniana se puede aproximar y se simplifica. Desde este punto de vista, es conveniente interpretar $\tilde{\varphi}$ como un tiempo interno del sistema. Estamos asumiendo una representación tal que las funciones de $\tilde{\varphi}$ actúan como operadores multiplicativos sobre $\Psi$.

Vamos a considerar por un momento el modelo de FLRW no perturbado. El operador que representa la ligadura hamiltoniana es proporcional a $\hat{\ }^2_{\tilde{\varphi}} - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$. En la imagen de evolución que estamos empleando, donde $\tilde{\varphi}$ desempeña el papel de tiempo, las soluciones de frecuencia positiva de esta ligadura obedecen la relación

$$\chi(\tilde{\alpha}, \tilde{\varphi}) = \hat{U}(\tilde{\alpha}; \tilde{\varphi})\chi_0(\tilde{\alpha}), \tag{5.4.8}$$

siendo $\hat{U}$ el operador de evolución unitario correspondiente. Por ejemplo, si $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$ es autoadjunto, entonces uno puede proyectar su parte positiva (P.P.) y tomar $\sqrt{\text{P.P.}(\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)})}$ como el operador autoadjunto dependiente de $\tilde{\varphi}$ que genera la evolución temporal en la ecuación (5.4.8). Para mantener la discusión lo más general posible, y puesto que la condición autoadjunta de $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$ podría no estar garantizada, o podría ser que una definición directa de la raíz cuadrada no estuviera al alcance, vamos a asumir simplemente que la parte FLRW de los estados cuánticos verifican (5.4.8), donde la familia de operadores de evolución $\hat{U}$ es tal que existe un operador autoadjunto $\hat{\hat{\mathcal{H}}}_0$ que satisface la condición $[\hat{\ }_{\tilde{\varphi}}, \hat{U}]\hat{U}^{-1} = \hat{\hat{\mathcal{H}}}_0$. Remarcamos que los conceptos de autoadjunción y unitariedad que usamos aquí son aquéllos correspondientes a la parte de la geometría de nuestro espacio de Hilbert,[12] $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$. En verdad, como veremos más adelante, $\chi$ proporciona una solución aproximada del modelo de FLRW siempre y cuando la raíz cuadrada de $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$ sea *aproximadanente* $\hat{\hat{\mathcal{H}}}_0$ en el sentido de que la actuación de $(\hat{\hat{\mathcal{H}}}_0)^2 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} + [\hat{\ }_{\tilde{\varphi}}, \hat{\hat{\mathcal{H}}}_0]$ sobre $\chi$ sea considerablemente pequeña (o se cumpla una condición similar alcanzada con un orden de factores alternativo).

Por otro lado, en la ecuación (5.4.8) normalizamos el estado $\chi_0(\tilde{\alpha})$ a la unidad en $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$. Esta parte del estado cuántico se puede entender como el estado de la geometría FLRW en el

[11] Esta notación no implica que hayamos adoptado una representación concreta para la geometría homogénea en la cual tengamos un operador $\tilde{\alpha}$ que actúe por multiplicación, sino que, más bien, es un forma simbólica de indicar la dependencia funcional en el sector de la geometría homogénea.

[12] En una representación de Schrödinger convencional en la que $\hat{\ }_{\tilde{\varphi}} = -i\partial_{\tilde{\varphi}}$, recuperamos el operador de evolución unitaria estándar

$$\hat{U}(\tilde{\alpha}; \tilde{\varphi}) = \mathcal{P}\left[\exp\left(i\int_{\tilde{\varphi}_0}^{\tilde{\varphi}} d\tilde{\varphi}\, \hat{\hat{\mathcal{H}}}_0(\tilde{\alpha}, \tilde{\varphi})\right)\right].$$

De nuevo, el símbolo $\mathcal{P}$ denota la ordenación temporal con respecto a $\tilde{\varphi}$.

instante inicial de tiempo $\tilde{\varphi}_0$ (y por tanto es independiente de $\tilde{\varphi}$). Nuevamente, una elección natural sería la de un estado semiclásico $\chi_0$, picado en una cierta geometría homogénea y que si es posible, permanezca picado bajo la evolución dictada por $\hat{U}$.

Vamos a incorporar el ansatz (4.4.1) en la ecuación para la ligadura $\tilde{H}\Psi = 0$. Tendiendo en cuenta que

$$\hat{\ }_{\tilde{\varphi}}\Psi = \chi(\hat{\ }_{\tilde{\varphi}}\quad) + (\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\chi)\quad , \tag{5.4.9a}$$

$$\hat{\ }^2_{\tilde{\varphi}}\Psi = \chi(\hat{\ }^2_{\tilde{\varphi}}\quad) + 2(\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\chi)(\hat{\ }_{\tilde{\varphi}}\quad) + ([\hat{\ }_{\tilde{\varphi}}, \hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0]\chi)\quad + \left\{(\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0)^2\chi\right\}\quad , \tag{5.4.9b}$$

se puede reescribir la ligadura como

$$\left\{\left((\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0)^2 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} + [\hat{\ }_{\tilde{\varphi}}, \hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0]\right)\chi\right\}\quad + 2(\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\chi)(\hat{\ }_{\tilde{\varphi}}\quad) + \chi(\hat{\ }^2_{\tilde{\varphi}}\quad) - \frac{1}{2}[\hat{\ }_{\tilde{\varphi}} - \hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0, \hat{\Theta}\ ](\chi\quad)$$
$$- \left\{\hat{\Theta}_e + (\hat{\Theta}\ \hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0)_{\mathrm{S}}\right\}(\chi\quad) - \hat{\Theta}\ \left\{\chi(\hat{\ }_{\tilde{\varphi}}\quad)\right\} = 0. \tag{5.4.10}$$

Hacemos notar que, con nuestra premisa sobre la representación para el modo cero del campo escalar, los operadores $[\hat{\ }_{\tilde{\varphi}}, \hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0]$ y $[\hat{\ }_{\tilde{\varphi}}, \hat{\Theta}\ ]$ dependen de $\tilde{\varphi}$, que actúa como operador mediante multiplicación, pero son independientes de $\hat{\ }_{\tilde{\varphi}}$. Además, el primer término de la ecuación anterior es la corrección inferida por la consideración de que las funciones de onda aproximadas no son soluciones exactas a la ligadura del sector homogéneo (para ver esto, podemos hacer constante y los operadores $\hat{\Theta}$ y $\hat{\Theta}_e$ de los modos de MS iguales a cero).

Vamos a considerar de nuevo que, para la geometría homogénea de FLRW, únicamente los términos correspondientes a los valores esperados sobre $\chi$ son relevantes. Dicho en otras palabras, cuando tomamos el producto interno del lado izquierdo de la ecuación (5.4.10) con $\chi$, con respecto a la geometría de FLRW (esto es, en $\mathcal{H}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{grav}}$), despreciamos las posibles transiciones cuánticas a cualquier otro estado mediado por la acción de la ligadura. A partir de la ecuación (5.4.10) no es difícil ver que, para que esta aproximación sea válida, sólo necesitamos que los siguientes operadores tengan una dispersión relativa pequeña sobre el estado $\chi$ para todos los valores de $\tilde{\varphi}$ (es decir, que estén picados sobre el estado $\chi$ a lo largo de la evolución en $\tilde{\varphi}$): i)$\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0$, ii) $\hat{\vartheta}_e$, iii) $-\frac{i}{2}\mathrm{d}_{\tilde{\varphi}}\hat{\vartheta}\ + (\hat{\vartheta}\ \hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0)_S + \hat{\vartheta}_e$, y iv) $-i\mathrm{d}_{\tilde{\varphi}}\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0 + (\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0)^2 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$, donde [de forma similar a como hicimos en (4.4.4)] ahora hemos definido [13]

$$-i\mathrm{d}_{\tilde{\varphi}}\hat{O} := [\hat{\ }_{\tilde{\varphi}} - \hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0, \hat{O}] \tag{5.4.11}$$

para cualquier operador $\hat{O}$. En principio, la condición sobre el operador iv) podría satisfacerse con una elección adecuada de $\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0$, de acuerdo con nuestros comentarios anteriores.

[13] En el caso convencional en que $\hat{\ }_{\tilde{\varphi}} = -i\partial_{\tilde{\varphi}}$, $\mathrm{d}_{\tilde{\varphi}}$ es la derivada total en la imagen de Heisenberg correspondiente a una evolución en el tiempo $\tilde{\varphi}$ generada por $\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0$.

Asumiendo que estas aproximaciones son válidas, tendremos que

$$
\begin{aligned}
&\hat{\ }^2_{\tilde{\varphi}} + \left(2\langle\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\rangle_\chi - \langle\hat{\Theta}\ \rangle_\chi\right)\hat{\ }_{\tilde{\varphi}} \\
&= \left[\langle\hat{\Theta}_e + \left(\hat{\Theta}\ \hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\right)_S\rangle_\chi + i\langle \mathrm{d}_{\tilde{\varphi}}\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0 - \frac{1}{2}\mathrm{d}_{\tilde{\varphi}}\hat{\Theta}\ \rangle_\chi + \langle\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - (\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0)^2\rangle_\chi\right] \quad . \qquad (5.4.12)
\end{aligned}
$$

Esta ecuación da lugar a una ecuación de Schrödinger generalizada para la evolución (en $\tilde{\varphi}$) de las inhomogeneidades siempre y cuando se satisfagan las siguientes condiciones:

a) $\langle\hat{\Theta}\ \rangle_\chi$ tiene que ser despreciable en comparación con $\langle\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\rangle_\chi$. Esto es válido a condición de que la contribución cuadrática de los modos de MS dada por $\hat{\Theta}$ permanezca (siempre) pequeña comparada con el generador de la evolución de la geometría FLRW, lo que es lógico asumir en el esquema perturbativo que adoptamos para el tratamiento de las inhomogeneidades.

b) $\hat{\ }^2_{\tilde{\varphi}}$ también tiene que ser despreciable. La autoconsistencia de esta hipótisis se analiza en el apéndice B.

c) $i\langle \mathrm{d}_{\tilde{\varphi}}\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0 - \frac{1}{2}\mathrm{d}_{\tilde{\varphi}}\hat{\Theta}\ \rangle_\chi$ tiene que ser ignorable en comparación con $\langle\hat{\Theta}_e + \left(\hat{\Theta}\ \hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\right)_S\rangle_\chi$. De lo contrario, la ecuación de Schrödinger incluiría un término que destruiría la unitariedad de la evolución de los modos de MS y que, además, no está presente en las ecuaciones de campo clásicas de estos invariantes de gauge.

Llegados a este punto, si se verifican estas tres condiciones, alcanzamos la ecuación de Schrödinger generalizada

$$
\hat{\ }_{\tilde{\varphi}} = \frac{\langle\hat{\Theta}_e + \left(\hat{\Theta}\ \hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\right)_S\rangle_\chi + \langle\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - (\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0)^2\rangle_\chi}{2\langle\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\rangle_\chi} \quad . \qquad (5.4.13)
$$

Como complemento a las condiciones previas, vamos a añadir que

d) $\langle\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - (\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0)^2\rangle_\chi$ sea despreciable en comparación con $\langle\hat{\Theta}_e + \left(\hat{\Theta}\ \hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\right)_S\rangle_\chi$. Esto resulta natural (una vez ignorado $\langle \mathrm{d}_{\tilde{\varphi}}\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\rangle_\chi$) si $\chi$ es una solución aproximada del modelo no perturbado, como ya habíamos avanzado.

Si las cuatro condiciones a)–d) se satisfacen, entonces la ecuación de Schrödinger se simplifica, y obtenemos que

$$
\hat{\ }_{\tilde{\varphi}} = \frac{\langle\hat{\Theta}_e + \left(\hat{\Theta}\ \hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\right)_S\rangle_\chi}{2\langle\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\rangle_\chi} \quad . \qquad (5.4.14)
$$

### 5.4.3. Ecuaciones efectivas de Mukhanov-Sasaki

Con toda la experiencia adquirida, vamos a deducir las ecuaciones efectivas clásicas para las variables de MS siguiendo los mismos pasos que especificamos en el capítulo anterior. Para ello, simplemente emplearemos el ansatz de Born-Oppenheimer y la aproximación de que el estado $\chi$ permanece picado sobre los operadores que codifican los efectos de la geometría de FLRW en el modo cero de la ligadura hamiltoniana.

En la subsección previa vimos que la evolución de las variables de MS está gobernada por la ecuación (5.4.12), que puede ser interpretada como el resultado de imponer una ligadura de la forma:

$$\hat{C}_{\rm per} = \hat{\ }^2_{\tilde{\varphi}} + D_\chi(\tilde{\varphi})\hat{\ }_{\tilde{\varphi}} + E_\chi(\tilde{\varphi}) - \left\langle \hat{\Theta}_e + \left(\hat{\Theta}\ \hat{\mathcal{H}}_0\right)_S - \frac{i}{2}\mathrm{d}_{\tilde{\varphi}}\hat{\Theta}\ \right\rangle_\chi . \tag{5.4.15}$$

Nuevamente, $D_\chi$ y $E_\chi$ son dos funciones de $\tilde{\varphi}$ que dependen del estado $\chi$ de la geometría homogénea, y cuya expresión explícita no facilitamos porque no es relevante para nuestros cálculos. En lo referente a $\hat{\ }_{\tilde{\varphi}}$, suponemos que actúa como una derivada generalizada con respecto a $\tilde{\varphi}$, sin necesidad tampoco de especificarla. Imponemos el operador ligadura $\hat{C}_{\rm per}$ sobre el sector $\mathcal{H}^{\rm matt}_{\rm kin} \otimes \mathcal{F}$ del sistema. Entonces, el generador de la evolución clásica correspondiente, $C_{\rm per}$, se obtiene reemplazando $\hat{\ }_{\tilde{\varphi}}$ por su forma explícita como derivada generalizada, y los operadores de las variables de MS $\hat{\ }^{\vec{n},\epsilon}_{1}$ y $\hat{\ }^{\vec{n},\epsilon}_{p_1}$ por sus análogos clásicos, de acuerdo con los comentarios anteriores.

Teniendo en cuenta la densitización de la ligadura [véase la ecuación (5.4.1)] y la definición de la parte homogénea de la función lapso, uno puede comprobar que $C_{\rm per}/2$ genera las reparametrizaciones en un tiempo $\bar{\ }$ relacionado, al orden perturbativo relevante, con el tiempo propio mediante $dt = \sigma e^{3\alpha} d\bar{\ }$. Además, podemos pasar a un tiempo conforme $\eta_\chi$, adaptado a la geometría FLRW *vestida* asociada al estado $\chi$. Volviendo a las expresiones (5.4.4), vemos que toda la dependencia de $C_{\rm per}/2$ en el momento de MS $^{\vec{n},\epsilon}_{p_1}$ viene dada por el término $\langle \hat{\vartheta}_e \rangle_\chi ( {}^{\vec{n},\epsilon}_{p_1})^2/2$, dentro de $\langle \hat{\Theta}_e \rangle_\chi$. Por tanto, parece natural definir[14] $l_0 d\eta_\chi = \langle \hat{\vartheta}_e \rangle_\chi d\bar{\ }$. Este cambio de tiempo está bien definido, puesto que $\langle \hat{\vartheta}_e \rangle_\chi$ es un número (que depende de $\tilde{\varphi}$ a través de $\chi$), y es monótono siempre y cuando el operador $\hat{\vartheta}_e$ que representa $\vartheta_e = e^{2\tilde{\alpha}}$ sea definido positivo. Es importante remarcar que en el caso de que $d\eta_\chi/d\bar{\ }$ hubiera resultado ser un operador, el parámetro de cambio de tiempo que hemos introducido no estaría bien definido. Resulta, pues, que el valor esperado sobre el estado $\chi$ es esencial a la hora de introducir dicho cambio. Asimismo, esta dependencia en el estado podría ocasionar que las propiedades de la evolución en los distintos tiempos, $\bar{\ }$ y $\eta_\chi$, llegaran a ser muy diferentes cuando se consideren en el espacio de Hilbert físico del sistema.

[14] Es posible ver que, con nuestra elección de factores numéricos, esta definición para el tiempo conforme no es sensible a la elección de $l_0$.

En resumen, la evolución de $\;_{1}^{\vec{n},\epsilon}$ en el tiempo $\eta_\chi$ viene dictada (bajo corchetes de Poisson) por

$$d_{\eta_\chi} \;_{1}^{\vec{n},\epsilon} = \frac{l_0}{2\langle\hat{\vartheta}_e\rangle_\chi}\{ \;_{1}^{\vec{n},\epsilon}, C_{\text{per}}\}, \tag{5.4.16}$$

donde $d_{\eta_\chi}$ denota la derivada con respecto al tiempo $\eta_\chi$. La evolución de $\;_{1}^{\vec{n},\epsilon}$ simplemente es $d_{\eta_\chi} \;_{1}^{\vec{n},\epsilon} = l_0 \;_{p_1}^{\vec{n},\epsilon}$. Utilizando este resultado y tomando otra vez la derivada temporal, llegamos a las siguientes ecuaciones para las variables de MS:

$$d^2_{\eta_\chi} \;_{1}^{\vec{n},\epsilon} = - \;_{1}^{\vec{n},\epsilon} \left[\tilde{\omega}_n^2 + \langle \hat{}_e + \hat{} \rangle_\chi\right], \tag{5.4.17}$$

donde hemos definido $\tilde{\omega}_n^2 = l_0^2\omega_n^2$ y

$$\langle \hat{}_e\rangle_\chi = l_0^2\frac{\langle\hat{\vartheta}_e\rangle_\chi}{\langle\hat{\vartheta}_e\rangle_\chi}, \qquad \langle \hat{} \rangle_\chi = l_0^2\frac{\langle(\hat{\vartheta}\;\hat{\mathcal{H}}_0)_S - \frac{i}{2}\mathrm{d}_{\tilde{\varphi}}\hat{\vartheta}\;\rangle_\chi}{\langle\hat{\vartheta}_e\rangle_\chi}. \tag{5.4.18a}$$

Esta ecuación es análoga a la que obtuvimos en el capítulo anterior, donde fijábamos el gauge a nivel clásico y luego pasábamos a definir el sistema reducido en términos de los invariantes de gauge de MS. Tal y como allí ocurría, el último término de la parte derecha de la ecuación (5.4.17) es una función de $\tilde{\varphi}$ sólo, y por tanto del tiempo cuando el campo escalar se evalúa sobre las soluciones de las ecuaciones efectivas. Este factor contiene las correcciones cuánticas a la ecuación de MS estándar, y codifica los efectos cuánticos de la geometría homogénea del fondo más relevantes. Aquí hemos conservado la contribución de $\left\langle \hat{} \right\rangle_\chi$, aunque, a la luz de nuestra discusión en el apéndice B, esperamos que sea despreciable en la práctica, dado que es proporcional a $\tilde{m}^2$, en el caso de que el potencial corresponda a un término de masa.

Finalmente, a pesar de que en nuestro análisis hemos asumido por simplicidad que el potencial del campo escalar viene dado por una contribución de masa, en realidad es sencillo generalizar la discusión a un potencial $W(\tilde{\varphi})$. Para ello, simplemente necesitamos reemplazar en la ecuación (5.4.3c) las potencias de $\tilde{m}^2\tilde{\varphi}^2$ por $2W(\tilde{\varphi})$, y el término $\tilde{m}^2$ por $W''(\tilde{\varphi})$, mientras que el factor $\tilde{m}^2\tilde{\varphi}$ en la ecuación (5.4.3a) debe ser reemplazado por $W'(\tilde{\varphi})$ (aquí el símbolo prima denota la derivada con respecto a $\tilde{\varphi}$). Por lo que respecta a las aproximaciones relacionadas con el ansatz de Born-Oppenheimer, en lugar de pedir que la masa sea pequeña, tendremos que asegurarnos, en general, de que las variaciones del potencial sean despreciables.

## 5.5. Representación de LQC para el sector homogéneo

A título de ejemplo, y con el fin de poder comparar con el resultado obtenido en el capítulo anterior, en esta sección adoptaremos la cuantización polimérica característica de LQC.

De nuevo, nos adherimos a la prescripción de dinámica mejorada y, entre todos los posible órdenes de factores simétricos para el operador de la ligadura hamiltoniana, nos ceñiremos al analizado en la referencia [28], puesto que resulta ser el más conveniente, como ya hemos argumentado. Seguiremos exactamente los mismos pasos que en la sección 4.3. Concretamente, introduciremos las mismas definiciones para la reformulación del sector homogéneo de nuestro espacio de fases, pasando a la representación en términos del par canónico $v$ y $b$, con $\{b, v\} = 2$, y reescalando el campo según (4.3.2). Definiremos el sector del espacio de Hilbert cinemático, $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$, como el generado por la base de estados $|v\rangle$, con $v \in \mathbb{R}$, normalizado respecto al producto interno discreto $\langle v'|v\rangle = \delta_v^{v'}$, sobre el cual el operador $\hat{v}$ actúa por multiplicación y $N_{\pm\bar{\mu}}$ produce un desplazamiento constante en la etiqueta de dichos estados. Asimismo, adoptaremos una representación de Schrödinger para el campo, tal que $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{matt}} = L^2(\mathbb{R}, d\phi)$. Sin embargo, debido al escalado que introdujimos al principio de este capítulo, tendremos que substituir la expresión (4.3.6) para el operador hamiltoniano de orden cero por:

$$\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} = \frac{3}{4\ G}\left(\frac{3}{4\ G\gamma^2}\hat{\Omega}_0^2 - \hat{\ }^2 m^2\hat{\phi}^2\right). \tag{5.5.1}$$

donde, nuevamente, el operador $\hat{\Omega}_0^2$ viene dado por (1.2.22). Una vez más, restringiremos nuestra discusión al subespacio $\mathcal{H}_\varepsilon^+$, construido a partir de estados con valores positivos $v \in \mathcal{L}_\varepsilon^+$ [recordamos la definición en (1.2.24)].

Finalmente, empleando la regularización de la inversa del volumen (4.3.4) y siguiendo la misma prescripción i)- iv)que detallamos en la sección 4.3 para la simetrización de los operadores representantes de cantidades del sector homogéneo, llegamos a las siguientes representaciones para los términos homogéneos que aparecen en las contribuciones cuadráticas de las inhomogeneidades a la ligadura hamiltoniana, a saber, los operadores $\hat{\vartheta}\ $, $\hat{\vartheta}_e$ y $\hat{\vartheta}_e$ que representan los términos $\vartheta$ en las ecuaciones (5.4.3):

$$\hat{\vartheta}\ = \frac{4}{l_0}\sqrt{12\ G}\gamma m^2\hat{\phi}\,\hat{\ }^{2/3}|\hat{\Omega}_0|^{-1}\hat{\Lambda}_0|\hat{\Omega}_0|^{-1}\,\hat{\ }^{2/3}, \tag{5.5.2a}$$

$$\hat{\vartheta}_e = \frac{3l_0}{4\ G}\,\hat{\ }^{2/3}, \tag{5.5.2b}$$

$$\begin{aligned}\hat{\vartheta}_e ={}& \frac{4\ G}{3l_0}\widehat{\left[\frac{1}{\ }\right]}^{1/3}\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}\left(19 - 32\ {}^2G^2\gamma^2\hat{\Omega}_0^{-2}\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}\right)\widehat{\left[\frac{1}{\ }\right]}^{1/3} \\ &+ \frac{3m^2}{4\ Gl_0}\,\hat{\ }^{4/3}\left(1 - \frac{8\ G}{3}\hat{\phi}^2\right),\end{aligned} \tag{5.5.2c}$$

definidos densamente sobre $\mathcal{H}_\varepsilon^+ \otimes L^2(\mathbb{R}, d\phi)$.

Según lo previsto, estos resultados coinciden con los obtenidos en el capítulo anterior, salvo algunos factores del operador de la inversa del volumen, que aparecen ahora como potencias inversas del propio operador de volumen. Como ya hemos mencionado anteriormente, esta diferencia tiene su origen en la particular elección de la densitización para el modo cero de la ligadura hamiltoniana que fijamos en el nivel clásico al principio de este capítulo.

# 6

# Tratamiento cuántico de los valores esperados

## 6.1. Introducción

La cosmología observacional está alcanzando un periodo de esplendor, impulsada por los avances técnicos logrados en las últimas décadas. Este progreso ha dado lugar a una nueva era conocida como *cosmología de precisión*, en la que gracias a la calidad de los datos podemos empezar a contrastar las predicciones de los diferentes modelos teóricos en cosmología con las observaciones experimentales, con el fin de testarlos. Asimismo, nuestra competencia para desarrollar nueva tecnología y la capacidad de detección actual están poniendo a nuestro alcance nuevas fuentes de exploración, abriendo ventanas hacia el conocimiento que nos eran inaccesibles. Un ejemplo claro es la reciente detección de ondas gravitatorias por el experimento LIGO [162]. No obstante, una de las observaciones más relevantes en la última década es la medida del CMB, como mencionamos en la Introducción.

Para concluir el tratamiento teórico de perturbaciones y con el objetivo de progresar hacia el análisis de nuevos efectos de carácter cuántico en el CMB, en este capítulo vamos a facilitar un método, basado en la imagen de interacción de la Mecánica Cuántica [138], para el cálculo numérico de las modificaciones a las ecuaciones de MS que hemos obtenido. En el contexto de esta tesis, este paso es importante por varias razones. En primer lugar, como ya hemos explicado, las predicciones en cosmología cuántica (y en particular en LQC) sólo pueden ser debidamente discriminadas si se retienen las correcciones cuánticas más allá de las aproximaciones efectivas o semiclásicas. Cualquier esperanza puesta en el testeo de diferentes teorías a partir de las observaciones del CMB depende de un análisis como éste. Segundo, el estudio de la familia de estados para los cuales las correcciones al espectro de potencias del CMB son importantes para cierto rango de escalas hace aconsejable la mejora de nuestras aproximaciones si verdaderamente queremos conseguir estimaciones cuantitativas más ajustadas. Además, la inclusión de correcciones adicionales causadas por los efectos cuánticos de la geometría pueden revelar nuevas huellas fenomenológicas en el espectro del CMB. Finalmente, este tipo de estudios también proporcionan una vía para comprobar hasta qué punto dichas correcciones cuánticas adicionales son o no relevantes en situaciones en las que se las ha asumido despreciables.

Uno de los mayores obstáculos es la determinación de la evolución cuántica de los estados FLRW, debido a la no integrabilidad del hamiltoniano en presencia de un potencial que no sea constante. Por ello, en particular, conviene extraer la dinámica libre, cuando el potencial se anula, y tratar la contribución de éste último en una imagen de interacción. En particular, en el contexto de LQG, vamos a adoptar una prescripción alternativa conocida como *LQC resoluble* (sLQC, de las siglas de *solvable LQC* en inglés) [97], para la cual la evolución en ausencia de potencial es muy sencilla y se puede determinar analíticamente.

## 6.2. Sector homogéneo: sLQC

Vamos a resumir en esta sección la cuantización del sector homogéneo del sistema FLRW siguiendo las prescripciones de la sLQC. Una vez más, tomaremos como punto de partida la reformulación del sistema clásico particular de la cuantización de lazos en la representación en la que el operador de volumen $\hat{v}$ actúa por multiplicación. Para simplificar la exposición respecto a la discusión de capítulos anteriores, tomamos coordenadas fiduciales en el tres-toro (correspondiente a las secciones espaciales) definidas en $S^1$, de manera que $l_0 = 2\ $ según nuestra anterior notación.

El contenido material de este sector viene dado exclusivamente por el modo cero del campo escalar del modelo, que se puede interpretar como un campo escalar homogéneo $\phi$. Clásicamente, y en ausencia de inhomogeneidades, el sistema debe satisfacer la ligadura

$$ {}^{2}_{\phi} - \frac{3}{4\ G\gamma^2}\Omega_0^2 + 8\ {}^2G^2\Delta\gamma^2 v^2 W(\phi) = 0. \tag{6.2.1}$$

Una de las características más destacables en LQC, distintiva de está cuantización respecto a otras más convencionales es, precisamente, la discretización de la medida de integración sobre el volumen. Como ya hemos visto, los estados físicos se desacoplan en sectores de superselección construidos a partir de la base de autoestados de volumen que difieren entre ellos en múltiples de cuatro unidades [véase la ecuación (1.2.24)]. En particular, en lo sucesivo concentramos nuestra atención en el sector de superselección formado por todos aquellos estados con soporte en el conjunto de volúmenes igual a un múltiple de cuatro, es decir $v = 4n$ con $n$ un entero[15]. En este sector, una representación especialmente manejable se puede obtener introduciendo una transformación de Fourier discreta de la variable $v$ a $b$ e implementando el siguiente cambio:

$$x = \frac{1}{\sqrt{12\ \ G}} \ln \left[ \tan \left( \frac{b}{2} \right) \right], \tag{6.2.2}$$

tal que $b = 2\tan^{-1}(e^{\sqrt{12\ \ G}x})$.

Si representamos las funciones de la conexión en términos de los elementos de holonomía $e^{\pm ib/2}$, obtenemos la contrapartida del operador $\Omega_0^2$ que tiene en cuenta la sustitución de $b$ por $\operatorname{sen} b$ [97]. Vamos a suponer, entonces, que empezamos con las funciones de onda $\Gamma$ en la representación $(v, \phi)$. Introduciendo el reescalado $\chi = \Gamma/(\ \ v)$ y llevando a cabo el cambio que hemos explicado a la nueva representación $(x, \phi)$, se obtiene que la ligadura del modelo homogéneo, particularizada a un potencial de campo no-nulo y con una densitización que se podría asociar con un gauge temporal armónico (que simplifica considerablemente el orden de factores)[97], adopta la expresión

$$\hat{\ }^2_\phi - \hat{\ }^2_x = 0, \tag{6.2.3}$$

donde los dos operadores de momento actúan como derivadas: $\hat{\ }_\phi = -i\partial_\phi$ y $\hat{\ }_x = -i\partial_x$. Nótese pues que, salvo por un factor constante, $\hat{\ }_x$ es justo una representación del operador para $\Omega_0$:

$$\hat{\Omega}_0 := \sqrt{\frac{4\ \ G\gamma^2}{3}}\,\hat{\ }_x. \tag{6.2.4}$$

Así, la dinámica cuántica generada por la ligadura de sLQC es tan simple que se puede integrar casi de manera inmediata. Reemplazando la evolución temporal en términos del campo escalar $\phi$, uno obtiene que, como $\hat{\ }_\phi$ y $\hat{\ }_x$ son observables de Dirac y por consiguiente son preservados bajo la dinámica, el operador $\hat{x}$ satisface

$$\hat{x} = \hat{x}_0 + (\phi - \phi_0)\,\mathrm{sgn}(\hat{\ }_x). \tag{6.2.5}$$

Aquí, $\hat{x}_0$ denota el operador $\hat{x}$ en la sección donde la variable de configuración del campo escalar (que se toma como tiempo interno) es $\phi_0$. Podemos entender $\phi = \phi_0$ como una sección inicial para la evolución. En la integración de $\hat{x}$, hemos usado que, en sLQC, uno restringe el operador $\hat{\ }_\phi$ a valores positivos para eliminar el cómputo doble de soluciones debido a invariancia bajo inversión de tiempo [97].

[15] Este sector puede verse como la unión de dos semirredes independientes formadas por volúmenes $v$ positivos y negativos, ya que la acción de la parte geométrica de la ligadura hamiltoniana se anula para volumen igual a cero.

Los estados físicos tienen la forma

$$\chi(x,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}[F(x_+) - F(x_-)], \tag{6.2.6}$$

donde $x_\pm = \phi \pm x$, correspondiente a los modos a izquierda o a derecha, respectivamente, y $F$ es una función cualquiera con una transformada de Fourier con soporte en la recta real positiva. El producto interno sobre los estados físicos puede ser expresado, por ejemplo utilizando sólo modos a izquierda, como

$$(\chi_1, \chi_2) = -2i \int_{\mathbb{R}} dx F_1^*(x_+) \partial_x F_2(x_+). \tag{6.2.7}$$

El símbolo $*$ denota aquí conjugación compleja. Con este producto interno, el operador $\hat{\ }_x$ es positivo en el sector de modos a izquierda, y negativo para los modos a derecha.

Si llamamos $\hat{P}_R$ y $\hat{P}_L$ a los proyectores sobre los modos a derecha o izquierda, en la referencia [97] se demostró que

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{3\ \ G}} \sum_{j=R,L} \hat{P}_j \cosh\left(\sqrt{12\ \ G}\hat{x}\right) \hat{\ }_x \hat{P}_j. \tag{6.2.8}$$

Recordando la definición para el volumen físico, su representación como operador se obtiene de manera sencilla como $\hat{\ } = 2\ \ G\gamma\sqrt{\Delta}|\hat{v}|$.

Adicionalmente, necesitaremos otros operadores a la hora de incluir un potencial para el campo escalar y describir más adelante la interacción con las inhomogeneidades. Concretamente, necesitaremos operadores para la regularización de la inversa del volumen y para el parámetro de Hubble. Además, será conveniente calcular la forma explícita del operador[16] $\hat{B} = \sqrt{4\ \ G/3}\gamma\ \hat{\ }\,|\hat{\Omega}_0|^{-1}\,\hat{\ }$.

Usando la regularización estándar en LQC de la inversa del volumen, que ya hemos visto, y la expresión (6.2.8) para el operador de volumen, podemos definir

$$\left[\widehat{\frac{1}{\ }}\right] = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \frac{1}{2\ \ G\gamma\sqrt{\Delta}} \hat{v}\left(|\hat{v}+1|^{1/3} - |\hat{v}-1|^{1/3}\right)^3. \tag{6.2.9}$$

Tal y como sucede en el caso del parámetro de Hubble, excepto por algunos factores del volumen, este operador puede ser expresado en términos del análogo de $\Omega_0$ cuando la longitud de las holonomías es doble. Recordando que la contrapartida efectiva de $\hat{\Omega}_0$ es $2\ \ G\gamma \operatorname{sen} b\, v$, vamos a definir

$$\Lambda_0 = 2\ \ G\gamma \operatorname{sen}(2b)\frac{v}{2} = 2\ \ G\gamma \cos b \operatorname{sen} b\, v, \tag{6.2.10}$$

[16] El operador $\hat{\Omega}_0^2$ tiene un espectro continuo; por tanto, la inversa que aparece en nuestra expresión está bien definida.

obtenida cuando se sustituye el conjunto canónico $\{v, b/2\}$ por el nuevo $\{v/2, b\}$, de manera que $b$ tiene la mitad del periodo. Si expresamos las funciones periódicas anteriores en términos de $v$ y $\Omega_0$ (en su versión efectiva), y utilizamos sus correspondientes representaciones, un cálculo cuidadoso (con una elección juiciosa del orden de factores) conduce a

$$\hat{\Lambda}_0 = -\sqrt{\frac{4\quad G\gamma^2}{3}}\,\tanh\left(\sqrt{12\quad G}\hat{x}\right)\hat{\ }_x \tag{6.2.11}$$

sobre cada sector de modos a izquierda y a derecha.

Finalmente, una cuenta sencilla muestra que, sobre cada uno de estos sectores,

$$\hat{B} = \frac{4\quad G\Delta\gamma^2}{3}\cosh^2\left(\sqrt{12\quad G}\hat{x}\right)|\hat{\ }_x|. \tag{6.2.12}$$

Concluimos esta sección haciendo notar que, en sLQC, la evolución cuántica de nuestros operadores auxiliares (el volumen, su inversa regularizada, $\hat{\Lambda}_0$ y $\hat{B}$) viene dictada por la evolución de $\hat{x}$ en la ecuación (6.2.5), mientras que $\hat{\ }_x$ permanece constante, tal y como corresponde a un observable de Dirac.

## 6.3. Perturbaciones y ecuaciones efectivas de Mukhanov-Sasaki

Introducimos un potencial para el campo escalar, $W(\phi)$, y estudiamos perturbaciones escalares en la métrica y el campo. Como el tratamiento cuántico de este sistema ya se ha discutido en detalle en los dos capítulos anteriores, aquí nos ceñiremos a la última descripción que acabamos de presentar, donde por fin la invariancia de gauge queda incorporada manifiestamente. Vamos a recuperar únicamente las expresiones necesarias. Recordemos que, tras la reducción del sistema mediante la imposición de las ligaduras en el nivel cuántico, las perturbaciones quedan caracterizadas por las variables $v_{\vec{n},\epsilon}$ de MS. Usando las prescripciones que allí especificamos, y salvo un factor numérico global, la ligadura hamiltoniana se puede representar mediante el operador $\hat{C}\quad = \hat{C}^{(0)} + \sum_{\vec{n},\epsilon}\hat{C}^{\vec{n},\epsilon}$, donde la contribución del sector homogéneo, incluyendo el potencial $W(\phi)$, es

$$\begin{aligned}
\hat{C}^{(0)} &= \hat{\ }^2_{\phi} - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}, &(6.3.1)\\
\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} &= \frac{3\hat{\Omega}_0^2}{4\ \ G\gamma^2} - 2W(\hat{\phi})\ \hat{\ }^2 = \hat{\ }^2_x - 2W(\hat{\phi})\ \hat{\ }^2. &(6.3.2)
\end{aligned}$$

Por su parte, las contribuciones cuadráticas de las perturbaciones verifican

$$\hat{C}^{\vec{n},\epsilon} = -\frac{4\ \ G}{3}\left[\hat{\Theta}_e^{\vec{n},\epsilon} + \left(\hat{\Theta}^{\vec{n},\epsilon}\ \hat{\ }_{\phi}\right)_S\right], \qquad (6.3.3)$$

donde hemos llamado

$$\begin{aligned}
\hat{\Theta}^{\vec{n},\epsilon} &= -\hat{\vartheta}\ \hat{v}^2_{\vec{n},\epsilon} &(6.3.4)\\
\hat{\Theta}_e^{\vec{n},\epsilon} &= -\left[(\hat{\vartheta}_e\omega_n^2 + \hat{\vartheta}\ _e)\hat{v}^2_{\vec{n},\epsilon} + \hat{\vartheta}_e\ \hat{\ }^2_{v_{\vec{n},\epsilon}}\right], &(6.3.5)
\end{aligned}$$

y donde (tomando $l_0 = 2\ \ $, como hemos indicado)

$$\begin{aligned}
\hat{\vartheta} &= 4\sqrt{\frac{3G}{\ }}\gamma W'(\hat{\phi})\ \hat{\ }^{2/3}|\hat{\Omega}_0|^{-1}\hat{\Lambda}_0|\hat{\Omega}_0|^{-1}\ \hat{\ }^{2/3}, &(6.3.6)\\
\hat{\vartheta}_e &= \frac{3}{2G}\ \hat{\ }^{2/3}, &(6.3.7)\\
\hat{\vartheta}\ _e &= \frac{1}{2}\widehat{\left[\frac{1}{\ }\right]}^{1/3}\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}\left(19 - 24\ \ G\gamma^2\hat{\Omega}_0^{-2}\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}\right)\widehat{\left[\frac{1}{\ }\right]}^{1/3}\\
&\quad + \frac{3}{8\ \ ^2G}\ \hat{\ }^{4/3}\left(W''(\hat{\phi}) - \frac{16\ \ G}{3}W(\hat{\phi})\right). &(6.3.8)
\end{aligned}$$

Nótese que todos los operadores que aparecen en estas expresiones están bien definidos en el formalismo de sLQC, de acuerdo con lo que acabamos de decir en la sección anterior. En particular, los operadores $\hat{\Omega}_0^{-2}$ y $|\hat{\Omega}_0|^{-1}$, de potencias negativas de $\hat{\Omega}_0$, pueden construirse a partir del operador positivo $\hat{\Omega}_0^2$ (y su raíz cuadrada, $|\hat{\Omega}_0|$) utilizando el teorema espectral.

Nos interesan, en particular, estados que satisfacen un ansatz análogo a la aproximación de Born-Oppenheimer de la física atómica y molecular, en el sentido de que puede separarse su dependencia en las perturbaciones y en el modo cero de la geometría de FLRW. Así pues, suponemos una factorización de la función de onda, $\Psi = \chi(x,\phi)\ \ (\mathcal{N},\phi)$ (siendo fieles a la notación de los capítulos anteriores). El argumento $x$ de la función de onda $\chi$ denota la dependencia en la componente geométrica del modelo de FLRW. Asimismo, asumimos que la dinámica de $\chi$ viene dictada por el operador $\hat{\mathcal{H}}_0$, definido aquí como la raíz cuadrada de $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$ tras adoptar un orden de factores *conveiente*, de manera tal que $\chi(x,\phi) = \hat{U}(x,\phi)\chi_0(x)$

(siendo $\chi_0$ el estado inicial de la geometría para un cierto valor $\phi_0$ del campo escalar), donde[17]

$$\hat{U}(x;\phi) = \mathcal{P}\left[\exp\left(i\int_{\phi_0}^{\phi} d\tilde{\phi}\,\hat{\mathcal{H}}_0(x,\tilde{\phi})\right)\right]. \tag{6.3.9}$$

Siguiendo un procedimiento análogo al explicado en el capítulo anterior para la deducción de las ecuaciones de evolución efectivas de las perturbaciones, encontramos que

$$\begin{aligned} d^2_{\eta_\chi} v_{\vec{n},\epsilon} = & - \frac{\langle \hat{\vartheta}_e + (\hat{\vartheta}\ \hat{\mathcal{H}}_0)_S + \frac{1}{2}[\ \hat{}_\phi - \hat{\mathcal{H}}_0, \hat{\vartheta}\ ]\rangle_\chi}{\langle \hat{\vartheta}_e \rangle_\chi} v_{\vec{n},\epsilon} \\ & - \omega_n^2 v_{\vec{n},\epsilon}. \end{aligned} \tag{6.3.10}$$

El tiempo que aquí aparece es un tiempo conforme dado por $d\eta_\chi = \langle \hat{\vartheta}_e \rangle_\chi d\ \ $, donde    es el tiempo harmónico adoptado en la sección anterior[18], que obedece la relación

$$\langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\chi d\eta_\chi = \langle \hat{\vartheta}_e \rangle_\chi d\phi. \tag{6.3.11}$$

La ecuación (6.3.10) contiene las correcciones cuánticas respecto a las ecuaciones de MS estándares, en forma de valores esperados sobre operadores del sector homogéneo del sistema. A simple vista, pues, es evidente que el cálculo de estos valores esperados será clave dentro del debate entorno a los posibles efectos cuánticos que atañen al espectro de potencias del CMB.

## 6.4. Imagen de interacción

Como hemos comentado, la mayor dificultad a la que nos enfrentemos durante el cálculo de los valores esperados es la integración de la evolución del estado de FLRW $\chi$, dictada por $\hat{\mathcal{H}}_0$, cuando el potencial del campo escalar no es constante, ya que la dinámica no es resoluble analíticamente y aparecen complicaciones incluso a la hora de hacer la integración numérica. Una forma de abordar el problema consiste en extraer la dinámica del caso sin masa (con un potencial nulo) para tratar el resto de la evolución como un tipo de interacción geométrica y pasar, entonces, a una imagen de interacción [138], en la que el campo homogéneo desempeña el papel de tiempo en la evolución.

[17] Si $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$ no fuera positivo, y simplemente fuera autoadjunto, en la práctica, para perturbaciones débiles y dada la ecuación (6.3.1), sería suficiente con considerar la parte positiva de su espectro tomando proyecciones, y proceder entonces al cálculo de la raíz cuadrada.

[18] En realidad,    es el parámetro de tiempo del generador de la evolución proporcional a la ligadura efectiva a partir de la cual se obtiene la ecuación (6.3.10).

A continuación, vamos a considerar el valor esperado $\langle \hat{A}(\phi)\rangle_\chi$ de un operador genérico $\hat{A}(\phi)$ en el estado $\chi(\phi)$ de la geometría de FLRW, donde mostramos explícitamente la posible dependencia en la variable $\phi$. Primero, definimos el operador $\hat{\mathcal{H}}_0$ en ausencia de potencial:

$$\hat{\mathcal{H}}_0^{(F)} = \sqrt{\frac{3}{4\ \ G\gamma^2}}|\hat{\Omega}_0|. \tag{6.4.1}$$

Hacemos notar que este operador es independiente de $\phi$. Además, tenemos que $\hat{\mathcal{H}}_0^{(F)} = |\hat{\ }_x|$ en sLQC. Podemos introducir ahora la contrapartida del estado $\chi$ en la imagen de interacción,

$$\chi_I(x,\phi) = e^{-i\hat{\mathcal{H}}_0^{(F)}(\phi-\phi_0)}\chi(x,\phi), \tag{6.4.2}$$

donde $\phi_0$ es el valor inicial de $\phi$. Para cualquier operador $\hat{A}$ en la imagen de Schrödinger original, el operador correspondiente en la imagen de interacción viene dada por [138]

$$\hat{A}_I = e^{-i\hat{\mathcal{H}}_0^{(F)}(\phi-\phi_0)}\hat{A}e^{i\hat{\mathcal{H}}_0^{(F)}(\phi-\phi_0)}. \tag{6.4.3}$$

Así pues, si llamamos $\hat{\mathcal{H}}_1 = \hat{\mathcal{H}}_0 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(F)}$, es bien sabido (y sencillo de reproducir) que la evolución de $\chi_I$ viene generada por el operador $\hat{\mathcal{H}}_{1I}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \chi_I(x,\phi) &= \hat{U}_I(x,\phi)\chi_0(x), && (6.4.4)\\ \hat{U}_I(x,\phi) &= \mathcal{P}\left[\exp\left(i\int_{\phi_0}^{\phi} d\tilde{\phi}\,\hat{\mathcal{H}}_{1I}(x,\tilde{\phi})\right)\right]. && (6.4.5) \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\langle\hat{A}(\phi)\rangle_\chi = \langle\hat{A}_I(\phi)\rangle_{\chi_I} = \langle\hat{U}_I^\dagger(\phi)\hat{A}_I(\phi)\hat{U}_I(\phi)\rangle_{\chi_0}, \tag{6.4.6}$$

donde el símbolo daga denota autoadjunción.

En la sección 6.2 vimos que la integración de la dinámica del caso libre se puede llevar a cabo analíticamente en el formalismo sLQC. En ese caso, la forma de los operadores geométricos en FLRW en la imagen de interacción se puede obtener de manera inmediata. Únicamente tendríamos que reemplazar su dependencia en el operador $\hat{x}$ por la misma dependencia en el operador evolucionado, de acuerdo con la ecuación (6.2.5), es decir

$$\hat{x} \to \hat{x}(\phi) = \hat{x} + (\phi - \phi_0)\,\mathrm{sgn}(\hat{\ }_x). \tag{6.4.7}$$

Esto reduce el problema de la evolución dinámica de nuestros valores esperados al cálculo de la integral de camino ordenada dada en la definición (6.4.5).

## 6.5. Contribuciones cuánticas del potencial

No obstante, la dinámica cuántica generada por $\hat{\mathcal{H}}_{1I}$ todavía es muy complicada de manejar en la práctica cuando está presente un campo potencial. Uno podría tratar esta evolución bajo una aproximación semiclásica, asumiendo que el estado $\chi$ exhibe un comportamiento de este tipo. Nótese que, en principio, el concepto *semiclásico* se asigna ahora a las trayectorias generadas por la evolución de interacción, puesto que las contribuciones de campo libre ya se tuvieron en cuenta en nuestro tratamiento en la sección previa. Para no restringirnos necesariamente al régimen semiclásico, iremos un paso más allá en nuestro análisis y extraeremos las contribuciones dominantes del potencial en la evolución cuántica. Recordemos de las secciones anteriores que la representación del campo escalar homogéneo actúa como un operador multiplicativo, lo cual simplificará considerablemente la notación.

Vamos a estudiar el operador $\hat{\mathcal{H}}_{1I}$ en más detalle. Recordamos que este operador es el correspondiente en la imagen de interacción de la diferencia $\hat{\mathcal{H}}_1$ entre el generador de la evolución en el caso homogéneo (la raíz cuadrada de $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$) y su contrapartida $\hat{\mathcal{H}}_0^{(F)}$ en el escenario de campo libre con un potencial $W(\phi)$ igual a cero. El paso a la imagen de interacción se lleva a cabo de manera directa implementando la sustitución (6.4.7). Ahora queremos mostrar que, salvo términos de orden cúbico o superiores en el potencial, el operador $\hat{\mathcal{H}}_1$ se puede representar, mediante una elección adecuada del orden de factores, de la siguiente forma aproximada:

$$\hat{\mathcal{H}}_1 \approx \hat{\mathcal{H}}_2 = -W(\phi)\hat{B} - W^2(\phi)\hat{C}, \tag{6.5.1}$$

$$\hat{C} = \sqrt{\frac{G}{3}}\gamma|\hat{\Omega}_0|^{-1/2}\,\hat{B}^2\,|\hat{\Omega}_0|^{-1/2}, \tag{6.5.2}$$

donde hemos definido un nuevo operador geométrico $\hat{C}$ que proporciona la parte cuadrática en el potencial, y hemos utilizado el operador $\hat{B} = \sqrt{4\;\;G/3}\gamma\,\hat{}\;|\hat{\Omega}_0|^{-1}\,\hat{}$ que introdujimos en la sección 6.2.

Será suficiente con probar que la raíz cuadrada de $\hat{\mathcal{H}}_0^{(F)} + \hat{\mathcal{H}}_2$ es una representación aceptable de $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$ al orden deseado. Un cálculo cuidadoso, pero a la vez directo, nos lleva a que

$$\left(\sqrt{\frac{3}{4\;\;G\gamma^2}}|\hat{\Omega}_0| + \hat{\mathcal{H}}_2\right)^2 = \frac{3}{4\;\;G\gamma^2}\hat{\Omega}_0^2 - 2W(\phi)\,\hat{}\,^2$$
$$-W(\phi)\hat{Q}_1 - W^2(\phi)\hat{Q}_2 + O(W^3). \tag{6.5.3}$$

Aquí hemos introducido dos operadores $\hat{Q}_1$ y $\hat{Q}_2$ que son independientes del campo escalar, y por tanto actúan solamente sobre el modo cero de la geometría FLRW. Todavía más importante es el hecho de que son justamente conmutadores, de manera que podríamos interpretar su origen como el resultado de una elección particular del orden de factores. Esencialmente, proporcionan correcciones cuánticas de segundo orden, puesto que son, en verdad, dobles conmutadores. Explícitamente, estos operadores tienen la forma

$$\hat{Q}_1 = \left[|\hat{\Omega}_0|^{-1},\,\hat{}\;\right]\left[|\hat{\Omega}_0|,\,\hat{}\;\right] + \left[\left[|\hat{\Omega}_0|,\,\hat{}\;\right],|\hat{\Omega}_0|^{-1}\,\hat{}\;\right],$$

$$\hat{Q}_2 \;=\; \frac{1}{2}\big[\big[|\hat{\Omega}_0|^{1/2}, \hat{B}^2\big], |\hat{\Omega}_0|^{-1/2}\big]. \tag{6.5.4}$$

Al final, si despreciamos los términos cúbicos o de órdenes superiores del potencial del campo, podemos concluir que el operador (6.5.3) es una representación válida del generador de la evolución homogénea. Por tanto, podemos escribir

$$\hat{\mathcal{H}}_{1I} = \hat{\mathcal{H}}_{2I} + \hat{\mathcal{H}}_{3I}, \tag{6.5.5}$$

donde $\hat{\mathcal{H}}_{2I}$ es el operador (6.5.1) en la imagen de interacción, y $\hat{\mathcal{H}}_{3I}$ es justo el remanente del operador de interacción original, que es al menos de orden cúbico.

Obviamente, si eliminamos la contribución cuadrática de $W(\phi)$ en $\hat{\mathcal{H}}_2$ [dada por el último término en la ecuación (6.5.1)], nuestra fórmula (6.5.5) continua siendo válida, aunque entonces $\hat{\mathcal{H}}_{3I}$ sería de orden cuadrático en el potencial del campo. La preferencia por mantener o eliminar este término dependerá de la relevancia que tengan estas contribuciones cúanticas a la hora de buscar predicciones precisas que se ajusten a las observaciones.

En el caso de sLQC, recordando que $\hat{\Omega}_0$ es proporcional a $\hat{\ }_x$ y, por tanto, un observable de Dirac para el campo libre, la contribución dominante del potencial al generador de la evolución en la imagen de interacción se puede obtener a partir de las ecuaciones (6.5.1) y (6.5.2), sencillamente, sustituyendo (6.4.7) en la dependencia en $x$ del operador $\hat{B}$ [es decir, en la raíz cuadrada del coseno hiperbólico de la ecuación (6.2.12)].

Ahora estamos en disposición de extraer la dinámica generada por $\hat{\mathcal{H}}_{2I}$, siguiendo los mismos pasos de la sección anterior, como si introdujéramos una nueva imagen de interacción. Si llamamos

$$\hat{U}_{2I} = \mathcal{P}\left[\exp\left(i\int_{\phi_0}^{\phi} d\tilde{\phi}\hat{\mathcal{H}}_{2I}(\tilde{\phi})\right)\right], \tag{6.5.6}$$

y, para cualquier operador $\hat{A}_I$ en la imagen de interacción original, definimos

$$\hat{A}_J = \hat{U}_{2I}^{\dagger}\hat{A}_I\hat{U}_{2I}, \tag{6.5.7}$$

entonces el valor esperado del operador viene dado por

$$\langle\hat{A}_I\rangle_{\chi_I} = \langle\hat{U}_J^{\dagger}\hat{A}_J\hat{U}_J\rangle_{\chi_0}, \tag{6.5.8}$$

donde

$$\hat{U}_J = \mathcal{P}\left[\exp\left(i\int_{\phi_0}^{\phi} d\tilde{\phi}\,\hat{\mathcal{H}}_{3J}(\tilde{\phi})\right)\right]. \tag{6.5.9}$$

Hasta aquí, nuestro tratamiento de los valores esperados es exacto. El obstáculo al que nos enfrentamos ahora es la integración de la evolución generada por $\hat{\mathcal{H}}_{2I}$ y por $\hat{\mathcal{H}}_{3J}$ para calcular los operadores unitarios $\hat{U}_{2I}$ y $\hat{U}_J$, respectivamente. En cuanto a $\hat{\mathcal{H}}_{2I}$, uno puede intentar calcular la evolución asociada determinando sus autofunciones numéricamente. En particular, si uno no incluye contribuciones cuadráticas del potencial en $\hat{\mathcal{H}}_{2I}$, su expresión parece lo bastante sencilla de manipular como para permitir el cálculo de su espectro. Otra posibilidad, obviamente, sería renunciar al tratamiento exacto ya a este nivel e introducir aproximaciones. Esencialmente, para computar el operador $\hat{A}_J$ hasta cierto orden en el potencial, podemos truncar la expansión en serie de $\hat{U}_{2I}$ en términos de la integral de camino ordenada de potencias de $\hat{\mathcal{H}}_{2I}$ [138]. Por supuesto, la unitariedad del cambio de representación se rompe en el momento en que introducimos el truncamiento, pero justo al orden que estamos despreciando. Se espera que la aproximación sea válida si el efecto del potencial multiplicado por la raíz cuadrada del volumen físico (y por el parámetro de Immirzi $\gamma$) es pequeño comparado con el de $\Omega_0$. En el caso en que el potencial corresponda a un término de masa, la aproximación se puede interpretar como una expansión asintótica en el cuadrado de la masa. Para el operador de evolución $\hat{U}_J$, por otro lado, una propuesta razonable consiste en tratar la dinámica siguiendo una aproximación efectiva.

A orden lineal en el potencial, la ecuación (6.5.7) se puede aproximar por

$$\hat{A}_J \approx \hat{A}_I - i\left[\hat{A}_I, \int_{\phi_0}^{\phi} d\tilde{\phi} W(\tilde{\phi}) \hat{B}_I(\tilde{\phi})\right]. \tag{6.5.10}$$

La notación $\hat{B}_I(\phi)$ indica que el operador $\hat{B}$ en la imagen de interacción considerada depende de $\phi$, puesto que viene dado por su evolución en dicho tiempo interno para el caso libre, esto es, cuando el potencial se anula.

Además, si uno quiere mantener las contribuciones cuadráticas del potencial en el operador $\hat{A}_J$, éstas resultan estar dadas por los siguientes términos adicionales:

$$\begin{aligned}
- &\quad \hat{A}_I \int_{\phi_0}^{\phi} d\tilde{\phi} W(\tilde{\phi}) \hat{B}_I(\tilde{\phi}) \int_{\phi_0}^{\tilde{\phi}} d\bar{\phi} W(\bar{\phi}) \hat{B}_I(\bar{\phi}) \\
- &\quad \Big(\int_{\phi_0}^{\phi} d\tilde{\phi} W(\tilde{\phi}) \hat{B}_I(\tilde{\phi}) \int_{\phi_0}^{\tilde{\phi}} d\bar{\phi} W(\bar{\phi}) \hat{B}_I(\bar{\phi})\Big) \hat{A}_I \\
+ &\quad \Big(\int_{\phi_0}^{\phi} d\tilde{\phi} W(\tilde{\phi}) \hat{B}_I(\tilde{\phi})\Big) \hat{A}_I \Big(\int_{\phi_0}^{\phi} d\tilde{\phi} W(\tilde{\phi}) \hat{B}_I(\tilde{\phi})\Big) \\
-i &\quad \Big[\hat{A}_I, \int_{\phi_0}^{\phi} d\tilde{\phi} W^2(\tilde{\phi}) \hat{C}_I(\tilde{\phi})\Big],
\end{aligned} \tag{6.5.11}$$

donde $\hat{C}_I$ es el operador (6.5.2) en nuestra imagen de interacción.

Vamos a particularizar nuestra discusión a la cuantización para el modelo de FLRW que se obtiene en sLQC cuando el potencial de campo, es el correspondiente a un término de masa, $W(\phi) = m^2\phi^2/2$. Recordamos que, en sLQC, el operador $\hat{B}_I$ se obtiene a partir de $\hat{B}$ reemplazando su dependencia en $\hat{x}$ por la misma dependencia en $\hat{x}(\phi)$, definida en la ecuación (6.4.7). Un cálculo preciso muestra entonces que

$$\int_{\phi_0}^{\phi} d\tilde{\phi} W(\tilde{\phi})\hat{B}_I(\tilde{\phi}) = \frac{2\ \ G}{3} m^2 \Delta\gamma^2 \left(\hat{F}(\phi) - \hat{F}(\phi_0)\right) \hat{\ }_x, \tag{6.5.12}$$

donde hemos definido el operador

$$\begin{aligned} \hat{F}(\phi) &= \frac{1}{8\sqrt{3\ \ G}}\left(\phi^2 + \frac{1}{24\ \ G}\right) \operatorname{senh}\left(4\sqrt{3\ \ G}\hat{x}(\phi)\right) \\ &- \frac{\phi}{48\ \ G}\cosh\left(4\sqrt{3\ \ G}\hat{x}(\phi)\right)\operatorname{sgn}(\hat{\ }_x) \\ &+ \frac{\phi^3}{6}\operatorname{sgn}(\hat{\ }_x). \end{aligned} \tag{6.5.13}$$

Las contribuciones cuadráticas (6.5.11) para el campo masivo en sLQC se han calculado explícitamente en el apéndice C.

## 6.6. Dinámica remanente

En la sección previa separamos el generador de la interacción $\hat{\mathcal{H}}_{1I}$ en dos términos: una contribución que contenía las primeras potencias del potencial, $\hat{\mathcal{H}}_{2I}$, y un remanente al que llamamos $\hat{\mathcal{H}}_{3I}$. Luego, truncamos el operador de la evolución correspondiente a $\hat{\mathcal{H}}_{2I}$ a órdenes bajos en el potencial.

Una revisión de las ecuaciones (6.5.10) y (6.5.11) nos lleva a esperar que los términos que despreciamos en el operador de evolución $\hat{U}_{2I}$ son del siguiente orden relativo con respecto a los que conservamos. Para contribuciones del operador $\hat{B}$, el orden relativo es

$$R_B = \sqrt{G}\gamma|(\phi - \phi_0)W|\frac{{}_I^2}{|\Omega_0|}, \tag{6.6.1}$$

donde usamos que $\Omega_0$ es una constante de movimiento en ausencia del potencial, y asumimos que el cambio de $W\ {}_I^2$ no es muy importante en el intervalo $(\phi_0, \phi)$ (si esta hipótesis no es válida, la estimación del orden relativo será más complicada). Por lo tanto, el truncamiento debería ser válido si $R_B \ll 1$. Si las contribuciones cuadráticas del potencial no se han tenido en cuenta en $\hat{\mathcal{H}}_{2I}$, ésta es la única restricción en la aproximación. Sin embargo, si se han conservado dichos términos, incluyendo por consiguiente el operador $\hat{C}_I$ en el análisis, entonces se espera que las contribuciones correspondientes en la expansión del operador de evolución sean, por razones similares a las anteriores, de un orden relativo

$$R_C = R_B^2 r_{BC}, \qquad r_{BC} = \frac{\sqrt{G}\gamma}{|\Omega_0(\phi - \phi_0)|}. \tag{6.6.2}$$

En este caso, la validez del truncamiento requiere también que $R_C \ll 1$.

Cuando no se pueden aplicar las condiciones para el truncamiento, uno debe bien enfrentarse a una integración cuántica del operador $\hat{U}_{2I}$ completo, o bien renunciar a extraer una contribución dominante del generador de interacción $\hat{\mathcal{H}}_{1I}$ y explorar, por ejemplo, si la dinámica de interacción completa puede ser tratada de manera efectiva. En lo que resta, centraremos la discusión en la región en que el proceso de truncación es correcto, y discutiremos el remanente del operador de evolución $\hat{U}_J$, introducido en la ecuación (6.5.9).

La potencia más baja del potencial que contribuye a este remanente de la evolución nos da un término de orden $R_C$ si la interacción $\hat{\mathcal{H}}_{2I}$ no contiene potencias al cuadrado de $W$ (porque entonces $\hat{C}$ está incluido en $\hat{U}_J$, en lugar de en $\hat{\mathcal{H}}_{2I}$). Este término es relevante, y consecuentemente también la evolución dictada por $\hat{U}_J$, si su contribución es mayor que los términos despreciados en el truncamiento de $\hat{U}_{2I}$, los cuales son de orden $R_B^2$ o $R_B^3$, dependiendo de si el truncamiento mantiene términos lineales o cuadráticos en $\hat{B}$, respectivamente. Puesto que $R_B \ll 1$ para la validez del truncamiento, tomamos por ejemplo la condición más restrictiva, esto es, que $R_C$ sea suficientemente mayor que $R_B^2$ o, utilizando nuestra notación en la ecuación (6.6.2), que $r_{BC}$ lo sea frente a la unidad. Así, en el caso en que el operador $\hat{\mathcal{H}}_{2I}$ esté definido sin la inclusión de $\hat{C}$, el proceso de truncamiento de $\hat{U}_{2I}$ y la consideración de la dinámica remanente $\hat{U}_J$ serán significativos en el sector en que $R_B \ll 1$ y $r_{BC}$ sea mayor que 1 (nótese que este sector no es vacío). Además, la evolución remanente que estamos discutiendo no debería ser ignorada, al menos, cuando la contribución de su potencia más baja en el potencial que se están analizando no se pueda despreciar, es decir, cuando $R_C$ no sea suficientemente pequeño. Puesto que el tratamiento cuántico de la evolución $\hat{U}_J$ es demasiado complicado, en este caso, el estudio debe hacerse mediante una aproximación efectiva. Para esto, es necesario que el estado de la geometría FLRW considerado esté picado entorno a una trayectoria efectiva de la evolución generada por $\hat{\mathcal{H}}_{3J}$.

Por completitud, vamos a dar la expresión de este generador, siguiendo todos los pasos que hemos explicado con anterioridad, y adoptando un truncamiento de $\hat{U}_{2I}$ a orden lineal en el potencial:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{3J} &= \mathcal{H}_{3I} + \left\{ \mathcal{H}_{3I}, \int_{\phi_0}^{\phi} d\tilde{\phi} W(\tilde{\phi}) B_I(\tilde{\phi}) \right\} \qquad (6.6.3) \\ \mathcal{H}_{3I} &= \left( \frac{3\Omega_0^2}{4\ G\gamma^2} - 2W(\phi)\ {}_I^2 \right)^{1/2} - \sqrt{\frac{3}{4\ G}} \frac{|\Omega_0|}{\gamma} \end{aligned}$$

$$+ \quad \sqrt{\frac{4\quad G}{3}}\gamma W(\phi)\frac{\ _I^2}{|\Omega_0|}, \qquad (6.6.4)$$

donde hemos usado corchetes de Poisson, llamamos $B_I = \sqrt{4\quad G/3}\gamma\ \ _I^2/|\Omega_0|$, y el subíndice $I$ en $\ _I$ indica la sustitución de $x$ por $x + (\phi - \phi_0)\,\mathrm{sgn}(\ _x)$ en la expresión del volumen físico. Se asume que el argumento de la raíz cuadrada es no-negativo, de lo contrario la evolución debe hacerse igual a cero.

Si se han tenido en cuenta las contribuciones cuadráticas del potencial que van con el operador $\hat{C}$ en la parte $\hat{\mathcal{H}}_{2I}$ de la interacción, entonces, utilizando la definición del generador de la evolución homogénea libre $\hat{\mathcal{H}}_0^{(F)}$ y la expresión (6.5.1), es posible convencerse de que la primera contribución en potencias del potencial en $\hat{U}_J$ es de orden $R_B^3 r_{BC}^2$, mientras que los términos ignorados en el truncamiento de $\hat{U}_{2I}$ se espera que sean de orden $R_B^3$ y $R_B^3 r_{BC}$. Por lo tanto, la dinámica de interacción remanente sería relevante al orden de truncamiento siempre que $r_{BC}$ fuera suficientemente mayor que la unidad, justo como cuando $\hat{\mathcal{H}}_{2I}$ incluía únicamente factores que eran lineales en el potencial. En el caso que estamos tratando aquí, las condiciones para el truncamiento y la consideración de la dinámica remanente se puede combinar de la siguiente forma: $1 \gg R_C = R_B^2 r_{BC}$ con $R_C$ mayor que $R_B^2$. Además, la parte restante de la evolución, $\hat{U}_J$, no se debería ignorar ahora si $R_C^2/R_B$ no es mucho más pequeña que la unidad. Se pueden aplicar comentarios similares a los anteriores para ver si la aproximación es aceptable mediante una descripción efectiva, si bien ahora la expresión del generador $\mathcal{H}_{3J}$ es mucho más complicada, aunque puede obtenerse siguiendo un cálculo metódico.

# Discusión

En la segunda parte de esta memoria, hemos estudiado la cuantización híbrida de perturbaciones cosmológicas en torno a un espacio-tiempo homogéneo e isótropo, plano, acoplado a un campo material escalar. Una finalidad importante de nuestra investigación ha sido clarificar la independencia de los resultados con respecto a las transformaciones de gauge que afectan a las perturbaciones y presentar un procedimiento robusto y fiable para la cuantización del modelo. Con este fin, hemos empleado las variables de MS y hemos diseñado un formalismo covariante para el sistema gravitatorio perturbado al orden de truncamiento estudiado. El análisis se ha desarrollado en dos trabajos, correspondientes a dos capítulos distintos que siguen estructuras paralelas, pero cuyas descripciones clásicas de partida para la cuantización son distintas.

El planteamiento inicial para el modelo de FLRW perturbado clásico es el mismo en ambos casos. Expandimos la dependencia espacial del campo y las variables ADM de la métrica lorentziana en modos de Fourier, usando una base de autofunciones del operador de Laplace-Beltrami de las secciones espaciales. En nuestro esquema perturbativo, partimos de la acción del modelo con correcciones cuadráticas en las perturbaciones y en la que tratamos los modos cero de manera exacta. El hamiltoniano total resulta ser, por supuesto, una suma de ligaduras en el que la ligadura escalar del modelo sin perturbar recibe correcciones cuadráticas, y, en el que aparecen además nuevas ligaduras lineales asociadas a los grados de libertad de gauge locales. En un primer análisis, hemos introducido ciertas condiciones para eliminar estos grados de libertad de gauge y obtener el modelo clásico reducido que luego hemos reformulado en términos de las variables de MS. La idea que hay detrás de esta estrategia es que la reformulación del sistema usando los invariantes de MS debe de descartar cualquier rastro de la fijación de gauge que pudiera empañar la interpretación física de los resultados. En un segundo estudio, en cambio, hemos realizado una transformación canónica global sobre todos los grados de libertad inhomogéneos para pasar a una descripción en términos de las variables de MS, las ligaduras perturbativas lineales abelianizadas y variables conjugadas correspondientes a las mismas. Esto nos ha permitido proceder con la cuantización del modelo sin necesidad de fijar ningún gauge. En ambos casos, la nueva descripción para las perturbaciones ha sido completada con una transformación canónica en el espacio de fases completo del sistema, transformación que incluye correcciones a los modos homogéneos de segundo orden en las perturbaciones. De esta forma, se recupera la estructura canónica original.

El esquema de cuantización híbrido se apoya en dos tipos de aproximaciones. Para empezar, se asume la validez de la jerarquía híbrida, según la cual los efectos de la geometría cuántica sobre los modos inhomogéneos son despreciables cuando se comparan con su influencia sobre los grados de libertad homogéneos. Por otro lado, el tratamiento parte de un mecanismo de truncamiento perturbativo a segundo orden en la acción. Aunque matemáticamente este truncamiento es consistente, en la literatura han surgido algunas discusiones acerca de su validez y su interpretación física. Por ejemplo, se ha llegado a afirmar [62, 63] que es inevitable renunciar a una descripción simpléctica del modelo de FLRW perturbado. El precio que debe pagarse, entonces, es que las perturbaciones pasan a ser tratadas simplemente como campos de prueba propagándose sobre lo que se ha llamado una geometría FLRW *vestida* (que incorpora los efectos cuánticos de la LQC), abandonando una auténtica descripción cuántica de la geometría que incluya perturbaciones, y más cercana por tanto a una Teoría Cuántica de Campos en espacio-tiempos curvos con una métrica vestida. Haciendo esto, uno también debe renunciar a la posibilidad de definir operadores métricos cuánticos para el sistema perturbado. La confusión parece tener su origen en el hecho de que un truncamiento perturbativo en la acción a un orden dado [58, 59, 150, 163] no corresponde al mismo orden de truncamiento en todos los grados de libertad métricos (y de la materia) del sistema, debido a la no linealidad de las ecuaciones de la Relatividad General (una discusión reciente sobre este hecho se puede encontrar también en la referencia [57]). Sin embargo, una vez más, la experiencia ganada con el análisis de los modelos de Gowdy es extraordinariamente útil para esclarecer esta situación. En el modelo con fijación de gauge para el caso con la topología espacial del tres-toro, los grados de libertad inhomogéneos de la métrica se pueden describir mediante un campo que no contiene modo cero y que satisface una ecuación de segundo orden lineal sin fuentes de tipo Klein-Gordon (sobre un espacio auxiliar que puede identificarse con la topología del círculo). Este campo se puede expandir en una serie perturbativa. La linealidad de la ecuación de movimiento implica que la solución para la contribución a la $n$-ésima potencia del campo en esta expansión es por sí misma una solución exacta. En otras palabras, los diferentes órdenes perturbativos se desacoplan en la ecuación de campo. Con cualquiera de estas soluciones (módulo un momento y una ligadura hamiltoniana global, y utilizando una solución para el modo cero del modelo) puede construirse una solución exacta para la métrica de este espacio-tiempo de Gowdy. Se puede comprobar fácilmente que la métrica incluye contribuciones de órdenes perturbativos diferentes a los que se han considerado en las soluciones del campo. Así, por ejemplo, si uno tiene en cuenta una solución de orden lineal en la expansión del campo inhomogéneo, la métrica resulta incorporar correcciones perturbativas de todos los órdenes. Incluso cuando uno se centra en las componentes métricas y considera el logaritmo de los elementos diagonales, es evidente que estas cantidades métricas incorporan contribuciones superiores a la aproximación perturbativa lineal. Obviamente, no hay ninguna inconsistencia en la descripción, ni siquiera en el tratamiento del modelo como un sistema simpléctico ligado. Uno de los objetivos de esta tesis ha sido, pues, la construcción de un formalismo para perturbaciones cosmológicas en torno a un universo FLRW que puede ser analizado de manera similar a como se hizo en los trabajos [62, 63], pero sin abandonar la idea de que la teoría cuántica también describe una variedad ligada dotada con una estructura simpléctica, como es habitual en los modelos estándares en gravedad. En este formalismo, uno podría enfrentarse a preguntas sobre la naturaleza genuinamente cuántica de la geometría perturbada y la estructura espacio-temporal asociada.

Una vez obtenido el nuevo hamiltoniano total del sistema, hemos procedido a su cuantización siguiendo el programa de Dirac. En el caso con una fijación de gauge previa, hemos llegado a una teoría cuántica con una única ligadura: la hamiltoniana escalar de los modos cero corregida por el hamiltoniano (cuadrático en perturbaciones) de MS. Para su representación, nos hemos centrado en una cuantización de lazos para el sector homogéneo, combinada con una representación de Fock para las perturbaciones. En el caso sin fijación de gauge, sin embargo, hemos procedido a la cuantización del conjunto de ligaduras completo. Gracias a la construcción específica del sistema clásico, la imposición de las ligaduras lineales del hamiltoniano como operadores nos confirma que los estados físicos son independientes de éstas, y los únicos grados de libertad relevantes son los invariantes de MS. Por tanto, volvemos a encontrarnos con que la única ligadura superviviente del sistema es la hamiltoniana o escalar de los modos cero corregida por un término perturbativo cuadrático cuyas componentes únicamente dependen de las variables de MS. Como consecuencia podemos asegurar que, en nuestro caso, reducir el sistema clásicamente y cuantizar la teoría resultante conduce al mismo resultado que si cuantizamos primero e imponemos después las ligaduras, representadas como operadores. Por otro lado, en el caso sin fijación de gauge, hemos considerado además una cuantización híbrida generalizada en la que no hemos especificado el tipo de representación adoptada para los modos homogéneos de la geometría.

Para el análisis de posibles soluciones físicas de nuestro sistema, hemos considerado estados en los que la dependencia en los grados de libertad homogéneos de la geometría se desliga de la correspondiente a los grados perturbativos. Con este ansatz, despreciando además posibles transiciones en el estado cuántico de la geometría de FLRW mediadas por la ligadura, y asumiendo un número controlado de aproximaciones acordes a nuestro esquema de truncamiento, hemos deducido una ecuación de tipo Schrödinger para la evolución de las perturbaciones. En el caso particular en que adoptamos la cuantización de lazos para el sector homogéneo, y dejando a un lado las diferencias en la cuantización de Fock y en las prescripciones que hemos usado para definir los operadores cuánticos que aparecen, esta ecuación de Schrödinger es comparable con la ecuación de evolución que se obtuvo para las perturbaciones dentro del formalismo de la métrica vestida [62, 63]. A efectos prácticos, la principal discrepancia es el rango de validez discutido para esta ecuación en el formalismo híbrido, que hemos resumido en las condiciones a)-c) del capítulo 4. Este resultado ha motivado el estudio de un orden de factores alternativo para la representación cuántica del modo cero de la ligadura hamiltoniana, demostrando que los términos que uno necesita despreciar para alcanzar la ecuación de Schrödinger en el formalismo de la métrica vestida a partir del nuestro son, en verdad, conmutadores entre operadores. En otras palabras, uno podría decir que el formalismo de la métrica vestida podría derivarse a partir de nuestro esquema híbrido si se hace una elección particular del orden de factores y de las prescripciones para la construcción de la representación cuántica.

Por otro lado, dentro de nuestro marco, uno también podría analizar directamente el cierre del álgebra de ligaduras para, así, intentar conectar este tratamiento con la otra corriente que busca deducir ecuaciones efectivas para las perturbaciones introduciendo en las ligaduras correcciones supuestamente propias de la LQC.

Una de las conclusiones más importantes de nuestro análisis es la robustez de la clase de ecuaciones dinámicas que gobiernan la evolución de los invariantes de MS. Hemos visto que su dinámica efectiva siempre viene determinada por una ecuación armónica, con una frecuencia que depende del tiempo interno del sistema, siempre y cuando, claro, los estados cuánticos estén convenientemente picados con respecto a los operadores que se ven afectados por la geometría de FLRW en el modo cero de la ligadura hamiltoniana, e independientemente de si la ecuación para la ligadura puede ser aproximada por una de tipo Schrödinger. Las ecuaciones de MS obtenidas contienen modificaciones cuánticas que son las mismas para todos los modos. Es relevante el hecho de que éstas no afecten al carácter hiperbólico heredado de las ecuaciones clásicas para tales perturbaciones en Relatividad General en el régimen ultravioleta.

Finalmente, motivados por las más recientes medidas del espectro de potencias del CMB, y con objeto de poder llegar a contrastar con ellas las predicciones teóricas, en el último capítulo de esta memoria hemos desarrollado un método para el cálculo de los valores esperados que aparecen en las ecuaciones efectivas para las perturbaciones, tratando de capturar la mayor cantidad de información posible sobre los efectos de la geometría cuántica. En particular, hemos presentado una técnica para la determinación de la evolución de los estados del sector homogéneo de la geometría basada, principalmente, en el formalismo de imagen de interacción empleado en Mecánica Cuántica.

# 7

# CONCLUSIONES

El trabajo realizado para esta tesis proporciona un marco sólido para el análisis de perturbaciones escalares, y por extensión también tensoriales, en el contexto de la cosmología cuántica, con el objetivo principal de extraer predicciones físicas fiables. En términos generales, hemos proporcionado un programa de cuantización híbrida que nos permite comparar diferentes propuestas de gravedad cuántica y, además, potencialmente, contrastarlas con datos observacionales. El grueso de la tesis se ha centrado en la teoría de la LQG, no obstante. De acuerdo con el modelo cosmológico favorecido por las observaciones, hemos estudiado un espacio-tiempo FLRW plano provisto de un campo escalar mínimamente acoplado sujeto a un potencial. Puesto que uno de los ingredientes principales del esquema híbrido es la cuantización de Fock de las perturbaciones también nos hemos ocupado del análisis de los criterios de unicidad para la representación de Fock de las relaciones de conmutación canónicas en el caso de un campo escalar en un espacio-tiempo cosmológico no estacionario con secciones compactas planas, con el fin de eliminar las ambigüedades que aparecen durante el proceso de cuantización.

## Resultados

- En primer lugar, hemos estudiado la cuantización de Fock de un campo escalar con una masa dependiente del tiempo propagándose en espacio-tiempos (ultra)estáticos con secciones espaciales compactas y planas, con la topología del tres-toro. Hemos discutido la aplicabilidad del criterio de unicidad que consiste en: i) la invariancia del vacío bajo las simetrías de la ecuación de movimiento (en este caso particular las del tres-toro), y ii) la implementabilidad unitaria de la dinámica. Así, hemos demostrado que la imposición del criterio expuesto elimina las dos principales ambigüedades inherentes a la Teoría Cuántica de Campos en espacio-tiempos cosmológicos, a saber:

1. La ambigüedad en la elección inicial de la descripción canónica para el campo entre todas aquéllas relacionadas mediante transformaciones canónicas lineales dependientes del tiempo. Como es sabido, en escenarios cosmológicos siempre existe la posibilidad de reescalar el campo a través de una función dependiente del tiempo, de manera que se asigna parte de la evolución al espacio-tiempo (físico o efectivo) del fondo. Este reescalado conlleva el escalado inverso del momento del campo. Nosotros hemos estudiado trasformaciones que incluyen también un término en la redefinición del momento que es proporcional a la variable de configuración del campo, multiplicado por una función dependiente del tiempo. Hemos demostrado que la implementación unitaria de la evolución es posible únicamente para una elección del par canónico tal que la dinámica correspondiente obedece una ecuación de Klein-Gordon. De esta forma, hemos mostrado que nuestro criterio de unicidad no deja margen para realizar ni reescalados del campo ni redefiniciones del momento.
2. Una vez determinada la descripción del campo, aparece la ambigüedad relativa a la elección de la representación de Fock de las relaciones de conmutación canónicas. Esta libertad conduce a la elección de estados de vacío que no son equivalentes entre sí. Nuestro criterio de unicidad consigue seleccionar una única clase de equivalencia unitaria de representaciones de Fock invariantes. Más concretamente, esta clase queda determinada por la representación de Fock naturalmente asociada a un campo escalar libre sin masa.

- Estudiando las ecuaciones de movimiento más generales de segundo orden con coeficientes dependientes del tiempo, para las que la dependencia espacial aparece reflejada únicamente mediante un término proporcional al operador de Laplace-Beltrami, hemos mostrado cómo cualquiera de tales ecuaciones puede interpretarse como una ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar con masa variable en un espacio-tiempo conformemente (ultra)estático. Además, la relación es biunívoca. Para ello, basta con introducir una reparametrización del tiempo y/o un reescalado del campo mediante funciones dependientes del tiempo que obedecen ciertas relaciones muy específicas. La única premisa es que el coeficiente del término de Laplace-Beltrami sea una función temporal de signo definido. Este resultado extiende, pues, el rango de aplicabilidad del criterio de unicidad anterior.

- Hemos visto que, si el coeficiente del término de Laplace-Beltrami se hace negativo, la métrica pasa a tener signatura euclídea y la ecuación de movimiento es de tipo elíptica. Este cambio de signo corresponde, por tanto, a un cambio en el carácter de la ecuación de evolución. Esta transición esconde una singularidad donde divergen los invariantes de curvatura. Además, hemos mostrado que las variables de Ashtekar tampoco están bien definidas en el límite asociado a este cambio de signatura singular. En él se pierde cualquier interpretación espacio-temporal.

- También hemos demostrado que la evolución de un estado de vacío definido en la región euclídea hasta alcanzar otra lorentziana da lugar a un fenómeno análogo al de creación de partículas en el vacío. El cálculo apunta a que la producción de partículas está amplificada por un factor exponencial como consecuencia del cambio de signatura en la métrica espacio-temporal. Este resultado se deduce al estudiar la relación entre la evolución en ambas regiones e imponer ciertos requisitos de continuidad sobre las soluciones de las ecuaciones de campo.

- Por otro lado, hemos discutido el tratamiento de perturbaciones cosmológicas en torno a un universo homogéneo e isótropo, con secciones espaciales planas y compactas. Truncamos la acción del sistema a orden cuadrático en las perturbaciones, procedimiento que permite mantener una estructura simpléctica. El hamiltoniano total del sistema es una combinación lineal de ligaduras. En un primer acercamiento al problema, hemos introducido una fijación de gauge correspondiente a las ligaduras lineales perturbativas.

- En el modelo reducido, hemos introducido una transformación canónica del espacio de fases completo. En particular, hemos redefinido las perturbaciones en términos de las variables de Mukhanov-Sasaki, prestando especial atención al reescalado y a la redefinición del momento canónicamente conjugado. Por su parte, las variables homogéneas adquieren correcciones cuadráticas en las perturbaciones para preservar las relaciones de conmutación canónicas. Tras la reformulación del sistema, hemos calculado el correspondiente hamiltoniano de Mukhanov-Sasaki, que contiene los términos cuadráticos en las perturbaciones que contribuyen al modo cero de la ligadura escalar.

- Hemos logrado cuantizar de forma completa el modelo de FLRW con perturbaciones escalares en el tres-toro mediante la aplicación de las técnicas de cuantización híbrida. En particular, hemos combinado una representación polimérica de lazos para el sector homogéneo con una cuantización de Fock de las perturbaciones. Para ello, primero, hemos necesitado adaptar la parte del espacio de fases de la geometría al lenguaje estándar de LQC. Los principales resultados de la cuantización son:

    1. El espacio de Hilbert cinemático se construye como el producto tensorial del espacio cinemático del sector homogéneo (que incluye la parte geométrica de FLRW y la componente homogénea del campo) y el espacio definido por una de las representaciones de Fock privilegiadas del campo de Mukhanov-Sasaki.

2. El operador que representa la ligadura del sistema, actuando en este espacio de Hilbert cinemático, da lugar a una ecuación en diferencias finitas en el volumen, que respeta los sectores de superselección del modelo sin perturbar (formado por estados con soporte en semirredes del volumen homogéneo). En particular, se comprueba que desaparece la singularidad clásica inicial de la Relatividad General.

- Para estudiar posibles estados físicos del sistema, hemos adoptado un ansatz de tipo Born-Oppenheimer que factoriza la dependencia en el fondo, por un lado, y en las inhomogeneidades, por otro. Fijando un estado de la geometría FLRW y despreciando posibles transiciones entre diferentes estados cuánticos del fondo generadas por la ligadura, se obtiene una ecuación para la función de onda de las inhomogeneidades. En este tratamiento, el modo homogéneo del campo escalar emerge como un tiempo interno del sistema que marca la evolución. Bajo ciertas aproximaciones, esta ecuación da lugar a una de tipo Schrödinger. Considerando un estado del fondo muy picado en una trayectoria, la dinámica de las inhomogeneidades entra en un régimen que puede interpretarse como una Teoría Cuántica de Campos sobre el espacio-tiempo efectivo que emerge de la cuantización de lazos del modelo de FLRW.

- Un orden de factores alternativo para la representación de la ligadura hamiltoniana ha permitido demostrar que el formalismo de la métrica vestida, estudiado también en LQC, puede derivarse a partir de nuestro formalismo híbrido si hacemos una elección particular del orden factores y de las prescripciones para la construcción de la representación cuántica.

- Hemos analizado las ecuaciones efectivas para las variables de Mukhanov-Sasaki mediante la sustitución directa de los operadores de creación y de aniquilación por su contrapartida clásica. Definiendo un tiempo conforme apropiado, hemos alcanzado una ecuación de segundo orden para las inhomogeneidades, hiperbólica en la región ultravioleta y, además, sin términos disipativos. Hemos constatado que las correcciones que aparecen respecto a las ecuaciones de Mukhanov-Sasaki habituales vienen dadas mediante valores esperados de ciertos operadores de los grados de libertad homogéneos evaluados en la evolución del estado cuántico de la geometría.

- Por completitud, hemos visto que las ecuaciones efectivas deducidas a partir del orden de factores alternativo asociado al formalismo de la métrica vestida tiene también carácter hiperbólico en el régimen ultravioleta, sin que surjan cambios fundamentales. Sin embargo, frente a la construcción usual en el caso de la métrica vestida, el tiempo conforme correspondiente pasa a depender de la elección particular de estado cuántico para la geometría homogénea.

- A continuación, hemos desarrollado una formulación genuinamente invariante de gauge para el mismo sistema gravitacional perturbado. El primer aspecto importante de este segundo tratamiento es que no fijamos la libertad de gauge asociada a las ligaduras lineales. Para ello, primero necesitamos abelianizar el álgebra de ligaduras, reemplazando una de las ligaduras lineales por una combinación de ésta y de la ligadura del modelo sin perturbar. Dentro de nuestro esquema de truncamiento, este proceso conlleva una redefinición del modo cero de la función lapso. Con todo esto, hemos introducido una nueva descripción canónica del espacio de fases completo en el que las perturbaciones se parametrizan en términos de las ligaduras perturbativas lineales abelianizadas y los modos de Mukhanov-Sasaki, junto con sus variables canónicamente conjugadas correspondientes. Como resultado de esta reformulación, la componente homogénea del lapso y el resto de multiplicadores de Lagrange adquieren correcciones perturbativas.

- Para la cuantización del sistema, hemos propuesto un formalismo híbrido generalizado, sin especificar la cuantización del sector FLRW del modelo, y hemos procedido a la construcción de los operadores que representan las ligaduras. Las ligaduras lineales generan translaciones en sus variables canónicamente conjugadas, y su imposición implica que los estados no dependen en absoluto de estos grados de libertad. De esta forma, los estados cuánticos únicamente dependen de los modos de Mukhanov-Sasaki y del sector homogéneo, tal y como habíamos visto ya. A partir de esta cuantización, se ha llevado un análisis paralelo al que hemos descrito anteriormente, obteniendo resultados análogos.

- El procedimiento que hemos seguido para obtener la evolución cuántica de las perturbaciones no requiere de ningún tipo de aproximación semiclásica para la geometría homogénea. Ni siquiera hemos necesitado resolver exactamente el modelo sin perturbar para determinar el estado cuántico de la geometría del fondo. En el contexto de nuestro esquema perturbativo, nos basta con considerar soluciones aproximadas, cuyas diferencias con respecto a las soluciones exactas puedan ser despreciable perturbativamente.

- Las ecuaciones efectivas de Mukhanov-Sasaki contienen la información necesaria para calcular el espectro de potencias corregido para las perturbaciones primordiales del CMB. Por ello, en el último capítulo, hemos presentado un método para el tratamiento de los valores esperados que aparecen en estas ecuaciones efectivas. En particular, para ilustrar este método, hemos estudiado en detalle el ejemplo de una formulación de la LQC para la descripción de la geometría homogénea especialmente conveniente, que permite la integrabilidad analítica de la dinámica en ausencia de potencial para el campo escalar. Para otras cuantizaciones de la geometría, uno siempre puede recurrir a técnicas de cálculo numérico. Empleando una imagen de interacción, hemos sido capaces de extraer esta dinámica libre de la evolución cuántica para la geometría FLRW. La dinámica remanente viene generada por un operador de interacción que se anula cuando el potencial es cero. Hemos dividido este operador en dos partes: las contribuciones con las potencias menores del potencial, por un lado, y las superiores por otro. Hemos introducido entonces un nuevo esquema de imagen de interacción para este último tipo de contribuciones, cuyo análisis es generalmente más complicado.

En resumen, hemos construido un programa que nos permite extraer predicciones para las perturbaciones primordiales a partir de diferentes propuestas de cuantización para la geometría del fondo. En principio, estas predicciones podrían llegar a ser contrastadas con observaciones del CMB, y así proporcionar un método para analizar la validez y legitimidad de la teoría cuántica de la gravedad que subyace.

# A

# LA MÉTRICA DEL ESPACIO-TIEMPO Y EL CAMPO ESCALAR EN LA FORMULACIÓN INVARIANTE DE GAUGE

## A.1. Modos cero

En este apéndice, damos las expresiones de las variables canónicas originales para el sector homogéneo del espacio de fases de nuestro sistema, $\{w^a\} = \{\alpha, \ {}_{\alpha}, \varphi, \ {}_{\varphi}\}$, en términos del nuevo conjunto canónico introducido en el texto, formado por las variables $\tilde{w}^a$ y ${}_{l}^{\vec{n},\epsilon}$. Sustituyendo las ecuaciones (5.2.16) y sus correspondientes derivadas en las ecuaciones (5.3.5), obtenemos las expresiones deseadas:

$$
\begin{aligned}
\alpha = \tilde{\alpha} &- \frac{1}{2}\sum_{\vec{n},\epsilon}\left[e^{-2\tilde{\alpha}}\left(1-3\frac{{}^{2}_{\tilde{\varphi}}}{{}^{2}_{\tilde{\alpha}}}\right)({}^{\vec{n},\epsilon}_{1})^2 + 2\frac{e^{-\tilde{\alpha}}}{{}_{\tilde{\alpha}}}\left(e^{6\tilde{\alpha}}\tilde{m}^2\tilde{\varphi} + 3\frac{{}^{3}_{\tilde{\varphi}}}{{}_{\tilde{\alpha}}} + {}_{\tilde{\alpha}}\,{}_{\tilde{\varphi}}\right){}^{\vec{n},\epsilon}_{1}\,{}^{\vec{n},\epsilon}_{2}\right] \\
&- \frac{1}{2}\sum_{\vec{n},\epsilon}\left[\left({}^{2}_{\tilde{\alpha}} + 3\,{}^{2}_{\tilde{\varphi}} + \frac{1}{3}e^{4\tilde{\alpha}}\omega^2_{\vec{n}}\right)({}^{\vec{n},\epsilon}_{2})^2 + \frac{2}{3}\,{}_{\tilde{\alpha}}\,{}^{\vec{n},\epsilon}_{2}\,{}^{\vec{n},\epsilon}_{3} + 2e^{\tilde{\alpha}}\frac{{}_{\tilde{\varphi}}}{{}_{\tilde{\alpha}}}\,{}^{\vec{n},\epsilon}_{2}\,{}^{\vec{n},\epsilon}_{p_1}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{\vec{n},\epsilon}\left[\frac{2}{{}_{\tilde{\alpha}}}\,{}^{\vec{n},\epsilon}_{2}\,{}^{\vec{n},\epsilon}_{p_2} + \frac{1}{3}({}^{\vec{n},\epsilon}_{3})^2\right],
\end{aligned}
\tag{A.1.1a}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{\alpha} = {}_{\tilde{\alpha}} &- \sum_{\vec{n},\epsilon}\left[6e^{5\tilde{\alpha}}\tilde{m}^2\tilde{\varphi}V^{\vec{n},\epsilon}_{1}\,{}^{\vec{n},\epsilon}_{2} + \left(3e^{6\tilde{\alpha}}\tilde{m}^2\tilde{\varphi}\pi_{\tilde{\varphi}} + \frac{2}{3}\,{}_{\tilde{\alpha}}e^{4\tilde{\alpha}}\omega^2_{\vec{n}}\right)({}^{\vec{n},\epsilon}_{2})^2\right] \\
&+ \sum_{\vec{n},\epsilon}{}^{\vec{n},\epsilon}_{1}\,{}^{\vec{n},\epsilon}_{p_1},
\end{aligned}
\tag{A.1.1b}
$$

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \sum_{\vec{n},\epsilon} \left[ e^{\tilde{\alpha}} \, {}^{\vec{n},\epsilon}_{p_1} \, {}^{\vec{n},\epsilon}_{2} + e^{-\tilde{\alpha}} \left( {}_{\tilde{\alpha}} + 3 \frac{{}_{\tilde{\varphi}}^{2}}{{}_{\tilde{\alpha}}} \right) {}^{\vec{n},\epsilon}_{1} \, {}^{\vec{n},\epsilon}_{2} + \left( 3 \, {}_{\tilde{\alpha}} \, {}_{\tilde{\varphi}} - \frac{1}{2} e^{6\tilde{\alpha}} \tilde{m}^2 \tilde{\varphi} \right) ( {}^{\vec{n},\epsilon}_{2} )^2 \right]$$

$$+ \sum_{\vec{n},\epsilon} \left[ e^{-\tilde{\alpha}} \, {}^{\vec{n},\epsilon}_{1} \, {}^{\vec{n},\epsilon}_{3} + {}_{\tilde{\varphi}} \, {}^{\vec{n},\epsilon}_{2} \, {}^{\vec{n},\epsilon}_{3} - 3 e^{-2\tilde{\alpha}} \frac{{}_{\tilde{\varphi}}}{{}_{\tilde{\alpha}}} ( {}^{\vec{n},\epsilon}_{1} )^2 \right], \tag{A.1.2a}$$

$${}_{\varphi} = {}_{\tilde{\varphi}} - \sum_{\vec{n},\epsilon} \left[ e^{5\tilde{\alpha}} \tilde{m}^2 \, {}^{\vec{n},\epsilon}_{1} \, {}^{\vec{n},\epsilon}_{2} + \frac{1}{2} e^{6\tilde{\alpha}} \tilde{m}^2 \, {}_{\tilde{\varphi}} ( {}^{\vec{n},\epsilon}_{2} )^2 \right]. \tag{A.1.2b}$$

## A.2. Función lapso y vector desplazamiento

La reformulación del modelo en términos de las variables invariantes de gauge para las perturbaciones conduce al hamiltoniano dado en la ecuación (5.3.12), con los multiplicadores de Lagrange $\{\bar{N}_0, G_{\vec{n},\epsilon}, K_{\vec{n},\epsilon}\}$, y las ligaduras expresadas en términos de las nuevas variables homogéneas $\{\tilde{\alpha}, {}_{\tilde{\alpha}}, \tilde{\varphi}, {}_{\tilde{\varphi}}\}$ y las nuevas variables para las inhomogeneidades $\{ {}^{\vec{n},\epsilon}_{l}, {}^{\vec{n},\epsilon}_{p_l} \}$. Comparando la ecuación (5.3.12) con (5.2.5), y teniendo en cuenta (5.3.10), obtenemos, dentro de nuestro esquema de truncamiento perturbativo, que

$$G_{\vec{n},\epsilon} = \tilde{g}_{\vec{n},\epsilon} + N_0 F^{\vec{n},\epsilon}_{|1}, \tag{A.2.1a}$$

$$\bar{N}_0 = N_0 + \sum_{\vec{n},\epsilon} \left( 3 e^{3\tilde{\alpha}} \tilde{g}_{\vec{n},\epsilon} a_{\vec{n},\epsilon} + N_0 F^{\vec{n},\epsilon}_{|2} \right), \tag{A.2.1b}$$

$$K_{\vec{n},\epsilon} = \tilde{k}_{\vec{n},\epsilon} + N_0 \left( F^{\vec{n},\epsilon}_{\_1} - 3 \frac{e^{-3\tilde{\alpha}}}{{}_{\tilde{\alpha}}} \, {}^{\vec{n},\epsilon}_{p_2} + \frac{9}{2} e^{-3\tilde{\alpha}} \, {}^{\vec{n},\epsilon}_{p_3} \right). \tag{A.2.1c}$$

A partir de estas expresiones deducimos las relaciones inversas (de nuevo dentro de nuestro esquema perturbativo):

$$N_0 = \bar{N}_0 \left[ 1 + \sum_{\vec{n},\epsilon} \left( 3 e^{3\tilde{\alpha}} F^{\vec{n},\epsilon}_{|1} a_{\vec{n},\epsilon} - F^{\vec{n},\epsilon}_{|2} \right) \right] - 3 e^{3\tilde{\alpha}} \sum_{\vec{n},\epsilon} G_{\vec{n},\epsilon} a_{\vec{n},\epsilon}, \tag{A.2.2a}$$

$$\tilde{g}_{\vec{n},\epsilon} = G_{\vec{n},\epsilon} - \bar{N}_0 F^{\vec{n},\epsilon}_{|1}, \tag{A.2.2b}$$

$$\tilde{k}_{\vec{n},\epsilon} = K_{\vec{n},\epsilon} - \bar{N}_0 \left( F^{\vec{n},\epsilon}_{\_1} - 3 \frac{e^{-3\tilde{\alpha}}}{{}_{\tilde{\alpha}}} \, {}^{\vec{n},\epsilon}_{p_2} + \frac{9}{2} e^{-3\tilde{\alpha}} \, {}^{\vec{n},\epsilon}_{p_3} \right), \tag{A.2.2c}$$

donde $a_{\vec{n},\epsilon}$ viene dado en la ecuación (5.2.16a). Estas fórmulas definen el modo cero de la función lapso y el vector desplazamiento, dados en las ecuaciones (4.2.3) y (5.2.1), en función de las variables y los multiplicadores de Lagrange de nuestra formulación invariante de gauge, salvo términos que son despreciables en nuestro orden de truncamiento en las perturbaciones.

Para completar las expresiones de las componentes de la métrica del espacio-tiempo en nuestra formulación, definidas por las ecuaciones (4.2.2), así como el campo escalar (4.2.5), únicamente necesitamos sustituir $a_{\vec{n},\epsilon}$, $b_{\vec{n},\epsilon}$, y $f_{\vec{n},\epsilon}$ por sus valores dados en (5.2.16), y reemplazar $\alpha$ y $\varphi$ en términos de $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\varphi}$ [véanse las ecuaciones (A.1.1a) y (A.1.2a)]. Recordemos que la diferencia entre las variables originales y las nuevas para el sector homogéneo es cuadrática en las perturbaciones y, por tanto, algunas contribuciones que se originan tras la anterior sustitución podrían ser ignoradas como despreciables dentro de nuestro esquema perturbativo (a saber, si proporcionan correcciones cuadráticas o de orden superior a los modos inhomogéneos, o correcciones a los modos cero cúbicas o superiores).

# B

# SEGUNDAS DERIVADAS DESPRECIABLES: AUTOCONSISTENCIA DE LA APROXIMACIÓN

En este apéndice vamos a analizar la autoconsistencia a la hora de despreciar las segundas derivadas de la función de onda de los modos de MS con respecto a la parte homogénea del campo escalar en la ecuación para la ligadura de los estados de tipo Born-Oppenheimer.

Consideramos que, en la ecuación (4.4.3), podemos ignorar $\langle\hat{\Theta}\ \rangle_\Gamma$ respecto a $\langle\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\rangle_\Gamma$. Esta suposición se puede justificar tomando como base nuestro propio esquema perturbativo. Entonces, partiendo de dicha ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{\ }_{\tilde{\varphi}} \quad =& \quad \frac{1}{2\langle\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\rangle_\Gamma}\left[\langle\hat{\Theta}_e + \left(\hat{\Theta}\ \hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\right)_S\rangle_\Gamma + i\langle \mathrm{d}_{\tilde{\varphi}}\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0 - \frac{1}{2}\mathrm{d}_{\tilde{\varphi}}\hat{\Theta}\ \rangle_\Gamma + \langle\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - (\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0)^2\rangle_\Gamma\right] \\ & -\frac{1}{2\langle\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\rangle_\Gamma}\hat{\ }^2_{\tilde{\varphi}} \quad . \end{aligned} \tag{B.1}$$

Ahora hacemos actuar $\hat{\ }_{\tilde{\varphi}}$ sobre esta ecuación y calculamos el valor de la segunda derivada con respecto a $\ $ . Teniendo en cuenta que $[\hat{\ }_{\tilde{\varphi}}, \langle\hat{O}\rangle_\Gamma] = -i\langle \mathrm{d}_{\tilde{\varphi}}\hat{O}\rangle_\Gamma$, y eliminando los términos que son despreciables perturbativamente, llegamos a

$$\begin{aligned}\left[\frac{3i\langle \mathrm{d}_{\tilde{\varphi}}\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\rangle_\Gamma + \langle\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - (\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0)^2\rangle_\Gamma}{2\langle\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\rangle_\Gamma} + 2\langle\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\rangle_\Gamma\right]\hat{\ }^2_{\tilde{\varphi}} \quad =& \quad \frac{2i\langle \mathrm{d}_{\tilde{\varphi}}\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\rangle_\Gamma + \langle\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - (\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0)^2\rangle_\Gamma}{2\langle\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\rangle_\Gamma} \\ & \times\left[2\langle\hat{\Theta}_e + \left(\hat{\Theta}\ \hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\right)_S\rangle_\Gamma + \frac{i}{2}\langle 3\mathrm{d}_{\tilde{\varphi}}\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0 - 2\mathrm{d}_{\tilde{\varphi}}\hat{\Theta}\ \rangle_\Gamma + \frac{5}{4}\langle\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - (\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0)^2\rangle_\Gamma\right] \\ & - i\left[\langle \mathrm{d}_{\tilde{\varphi}}\hat{\Theta}_e + \mathrm{d}_{\tilde{\varphi}}\left(\hat{\Theta}\ \hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\right)_S\rangle_\Gamma + i\langle \mathrm{d}^2_{\tilde{\varphi}}\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0 - \frac{1}{2}\mathrm{d}^2_{\tilde{\varphi}}\hat{\Theta}\ \rangle_\Gamma + \langle \mathrm{d}_{\tilde{\varphi}}\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - \mathrm{d}_{\tilde{\varphi}}(\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0)^2\rangle_\Gamma\right] \\ & - \frac{1}{8}\frac{(\langle\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - (\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0)^2\rangle_\Gamma)^2}{\langle\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0\rangle_\Gamma} \quad - \hat{\ }^3_{\tilde{\varphi}} \quad . \end{aligned} \tag{B.2}$$

Empezando con esta ecuación, es posible ver mediante iteración (operando repetidamente con $\hat{}_{\tilde{\varphi}}$) si es legítimo asumir que la acción de $\hat{}^{n+1}_{\tilde{\varphi}}$ sobre es despreciable en comparación con la acción de $\hat{}^{n}_{\tilde{\varphi}}$, y en particular si esto ocurre para $n = 1$. Para ello, uno puede ver que es suficiente que $\langle \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - (\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0)^2 \rangle_\Gamma$ sea despreciable respecto a los términos lineales en las perturbaciones, y que $\langle \mathrm{d}_{\tilde{\varphi}} \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - \mathrm{d}_{\tilde{\varphi}} (\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0)^2 \rangle_\Gamma$ sea despreciable también en comparación con los términos de orden cuadrático, todo ello asumiendo que

i) $\langle \mathrm{d}_{\tilde{\varphi}} \hat{\Theta}_e + \mathrm{d}_{\tilde{\varphi}} \big( \hat{\Theta} \ \hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0 \big)_S \rangle_\Gamma$ es despreciable con respecto a los términos de orden cuadrático en las perturbaciones.

ii) $\langle \mathrm{d}_{\tilde{\varphi}} \hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0 \rangle_\Gamma$ y $\langle \mathrm{d}_{\tilde{\varphi}} \hat{\Theta} \ \rangle_\Gamma$ son al menos del orden de los términos cuadráticos.

Recordemos que $-i \mathrm{d}_{\tilde{\varphi}} \hat{O} = [\hat{}_{\tilde{\varphi}}, \hat{O}] - [\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0, \hat{O}]$. El primer término es una derivada generalizada con respecto a la dependencia explícita en $\tilde{\varphi}$ del operador $\hat{O}$ considerado. Para los operadores más relevantes de nuestra discusión, esta dependencia proviene exclusivamente del potencial del campo escalar material, dado por un término de masa. Por consiguiente, si los posibles valores de la masa son considerablemente pequeños, el término $\langle [\hat{}_{\tilde{\varphi}}, \hat{O}] \rangle_\Gamma$ podría ser tratado de manera perturbativa, por ejemplo expresando el valor de la masa como una cierta potencia de la amplitud del parámetro de las perturbaciones inhomogéneas. Por otro lado, cuando $\hat{O}$ es cualquiera de los operadores $\hat{\Theta}$, el segundo término $\langle [\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_0, \hat{O}] \rangle_\Gamma$ aporta una contribución no nula, cuyos detalles dependen de la representación particular elegida para la geometría homogénea y de las propiedades del estado $\Gamma$. Como consecuencia, el que las condiciones anteriores sean ciertas o no depende de estos detalles particulares, y debería comprobarse cuidadosamente[19].

[19] Cuando la representación de la geometría homogénea sea la de LQC, referimos al lector a la discusión que se ofrece en el capítulo 4.

# C

# CONTRIBUCIONES CUADRÁTICAS DEL POTENCIAL

En este apéndice, calculamos la integral de camino ordenada del cuadro de $W\hat{B}_I$ y la integral de $W^2\hat{C}_I$. Estas integrales aparecen en las contribuciones cuadráticas del potencial a la expresión (6.5.11) de los operadores en la imagen J de interacción. Empleamos las expresiones (6.2.12) y (6.5.2), junto con la ecuación (6.2.4), para la definición de los operadores $\hat{B}$ y $\hat{C}$, y usamos la transformación (6.4.7) para implementar el cambio a la imagen de interacción.

Primero, vamos a dar la expresión para la integral simple. Introducimos la notación

$$\hat{\ }^{(m)}_{c}(\phi) = \frac{1}{2^{m+2}}\cosh\left(8\sqrt{3\ \ G}\hat{x}(\phi)\right) + \cosh\left(4\sqrt{3\ \ G}\hat{x}(\phi)\right), \tag{C.1}$$

$$\hat{\ }^{(m)}_{s}(\phi) = \frac{1}{2^{m+2}}\sinh\left(8\sqrt{3\ \ G}\hat{x}(\phi)\right) + \operatorname{senh}\left(4\sqrt{3\ \ G}\hat{x}(\phi)\right), \tag{C.2}$$

para cualquier entero $m$ no negativo, así como los operadores

$$\hat{G}_1(\phi) = \frac{3\phi^5}{20} + \frac{\phi^4\,\hat{\ }^{(1)}_{s}(\phi)}{4\sqrt{3\ \ G}}\operatorname{sgn}(\hat{\ }_x) - \frac{\phi^3\,\hat{\ }^{(2)}_{c}(\phi)}{12\ \ G} + \frac{3\phi^2\,\hat{\ }^{(3)}_{s}(\phi)}{16(3\ \ G)^{3/2}}\operatorname{sgn}(\hat{\ }_x) - \frac{\phi\,\hat{\ }^{(4)}_{c}(\phi)}{96\ \ ^2G^2} + \frac{3\,\hat{\ }^{(5)}_{s}(\phi)}{128(3\ \ G)^{5/2}}\operatorname{sgn}(\hat{\ }_x), \tag{C.3}$$

$$\hat{G}_2(\phi) = \phi^4\,\hat{\ }^{(0)}_{c}(\phi) - \frac{\phi^3\,\hat{\ }^{(1)}_{s}(\phi)}{\sqrt{3\ \ G}}\operatorname{sgn}(\hat{\ }_x) + \frac{\phi^2\,\hat{\ }^{(2)}_{c}(\phi)}{4\ \ G} - \frac{3\phi\,\hat{\ }^{(3)}_{s}(\phi)}{8(3\ \ G)^{3/2}}\operatorname{sgn}(\hat{\ }_x) + \frac{\hat{\ }^{(4)}_{c}(\phi)}{96\ \ ^2G^2}. \tag{C.4}$$

Un cálculo tedioso arroja la siguiente solución

$$\int_{\phi_0}^{\phi} d\tilde{\phi}\; W^2(\tilde{\phi})\hat{C}_I(\tilde{\phi}) = \left(\frac{Gm^2\Delta\gamma^2}{3}\right)^2 \Bigg(|\hat{\ }_x|^{1/2}\left\{\hat{G}_1(\phi) - \hat{G}_1(\phi_0)\right\}|\hat{\ }_x|^{1/2}$$
$$+\frac{i}{2}|\hat{\ }_x|^{-1/2}\left\{\hat{G}_2(\phi) - \hat{G}_2(\phi_0)\right\}|\hat{\ }_x|^{1/2}\Bigg). \qquad \text{(C.5)}$$

Calcularemos ahora la integral doble. Tenemos que

$$\int_{\phi_0}^{\phi} d\tilde{\phi} W(\tilde{\phi})\hat{B}_I(\tilde{\phi}) \int_{\phi_0}^{\tilde{\phi}} d\bar{\phi} W(\bar{\phi})\hat{B}_I(\bar{\phi}) = 2\left(\frac{Gm^2\Delta\gamma^2}{3}\right)^2$$
$$\times\left(|\hat{\ }_x|\left\{\hat{F}(\phi) - \hat{F}(\phi_0)\right\}^2|\hat{\ }_x| + 4i\sqrt{3\ \ G}\hat{K}(\phi)\hat{\ }_x\right), \qquad \text{(C.6)}$$

donde $\hat{F}(\phi)$ es el operador definido en la ecuación (6.5.13), y hemos llamado

$$\hat{K}(\phi) = \int_{\phi_0}^{\phi} d\tilde{\phi}\,\mathrm{senh}\left(4\sqrt{3\ \ G}\hat{x}(\tilde{\phi})\right)\tilde{\phi}^2 \int_{\phi_0}^{\tilde{\phi}} d\bar{\phi}\cosh^2\left(2\sqrt{3\ \ G}\hat{x}(\bar{\phi})\right)\bar{\phi}^2. \qquad \text{(C.7)}$$

Esta integral se puede resolver de manera exacta analíticamente, e incluimos el resultado, aunque sea largo. Así, llegamos a que $\hat{K}(\phi) = \hat{\kappa}(\phi) - \hat{\kappa}(\phi_0)$, con

$$\begin{aligned}
10(48\ \ G)^3\hat{\kappa}(\phi) = &- 64\sqrt{3\ \ ^3G^3}\phi^3(72\ \ G\phi^2 + 5)\mathrm{sgn}(\hat{\ }_x)\\
&+ 5\left(4(12\ \ G\phi^2+1)^2 - 3\right)\mathrm{senh}\left(8\sqrt{3\ \ G}\hat{x}(\phi)\right)\\
&- 40\sqrt{3\ \ G}(24\ \ G\phi^3+\phi)\cosh\left(8\sqrt{3\ \ G}\hat{x}(\phi)\right)\mathrm{sgn}(\hat{\ }_x)\\
&- 40\,\mathrm{senh}\left(4\sqrt{3\ \ G}\hat{x}(\phi)\right)\Big\{24\ \ G\phi\phi_0\cosh(4\sqrt{3\ \ G}\hat{x})\\
&- 2\sqrt{3\ \ G}\phi(24\ \ G\phi_0^2+1)\,\mathrm{senh}(4\sqrt{3\ \ G}\hat{x})\mathrm{sgn}(\hat{\ }_x)\\
&+ 24\ \ G\phi(20\ \ G\phi^3 - 8\ \ G\phi_0^3 + 5\phi) + 5\Big\}\\
&+ 20\cosh\left(4\sqrt{3\ \ G}\hat{x}(\phi)\right)\Big\{8\sqrt{3\ \ G}(96\ \ ^2G^2\phi^5\\
&- 96\ \ ^2G^2\phi^2\phi_0^3 + 40\ \ G\phi^3 - 4\ \ G\phi_0^3 + 5\phi)\mathrm{sgn}(\hat{\ }_x)\\
&+ 4\sqrt{3\ \ G}\phi_0(24\ \ G\phi^2+1)\cosh(4\sqrt{3\ \ G}\hat{x})\mathrm{sgn}(\hat{\ }_x)\\
&- (24\ \ G\phi^2+1)(24\ \ G\phi_0^2+1)\sinh(4\sqrt{3\ \ G}\hat{x})\Big\}.
\end{aligned} \qquad \text{(C.8)}$$

# PUBLICACIONES

El trabajo de investigación realizado en esta tesis ha dado lugar a las siguientes publicaciones:

- L. Castelló Gomar, J. Cortez, D. Martín-de Blas, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock quantization of scalar fields in spatially flat cosmological spacetimes*, JCAP **11**, 001 (2012).
- L. Castelló Gomar y G.A. Mena Marugán, *Uniqueness of the Fock quantization of scalar fields and processes with signature change in cosmology*, Phys. Rev. D **89**, 084052 (2014).
- L. Castelló Gomar, J. Cortez, D. Martín-de Blas, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Unitary evolution and uniqueness of the Fock quantization in flat cosmologies with compact spatial sections*, EJTP **11**, 43 (2014).
- L. Castelló Gomar, M. Fernández-Méndez, G.A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Cosmological perturbations in hybrid loop quantum cosmology: Mukhanov-Sasaki variables*, Phys. Rev. D **90**, 064015 (2014).
- L. Castelló Gomar, M. Martín-Benito y G.A. Mena Marugán, *Gauge-invariant perturbations in hybrid quantum cosmology*, JCAP **06**, 045 (2015).
- L. Castelló Gomar, M. Martín-Benito y G.A. Mena Marugán, *Quantum corrections to the Mukhanov-Sasaki equations*, Phys. Rev. D, en prensa (2016).
- G.A. Mena Marugán, D. Martín-de Blas y L. Castelló Gomar, *Unitary evolution and uniqueness of the Fock quantization in flat cosmologies*, J. Phys. Conf. Ser. **410**, 012151 (2013).

# BIBLIOGRAFÍA


[1] E.M. Lifshitz, *On the gravitational stability of the expanding universe*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **16**, 587 (1946).

[2] E.M. Lifshitz y I.M. Khalatnikov, *Investigations in relativistic cosmology*, Adv. Phys. **12**, 185 (1963).

[3] J. Ehlers, P. Geren y R.K. Sachs, *Isotropic solutions of the Einstein-Liouville equations*, J. Math. Phys. **9**, 1344 (1968).

[4] J.J. Ferrando, J.A. Morales y M. Portilla, *Inhomogeneous space-times admitting isotropic radiation: Vorticity-free case*, Phys. Rev. D **46**, 578 (1992).

[5] W.R. Stoeger, R. Maartens y G.F.R. Ellis, *Proving almost-homogeneity of the Universe – An almost Ehlers-Geren-Sachs theorem*, Astrophys. J. **443**, 1 (1995).

[6] R. Durrer, *Cosmological perturbation theory*, `arXiv:astro-ph/0402129`.

[7] D. Langlois, *Lectures on inflation and cosmological perturbations*, `arXiv:1001.5259`.

[8] A.R. Liddle y D.H. Lyth, *Cosmological inflation and large-scale structure*, Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra (2000).

[9] J. Martin, *Inflationary cosmological perturbations of quantum-mechanical origin*, Lect. Notes Phys. **669**, 199 (2005).

[10] A. Jones y A.N. Lasenby, *The Cosmic Microwave Background*, Living Rev. Relativity **1**, 11 (1998).

[11] M. Zaldarriaga, D. Spergel y U. Seljak, *Microwave background constraints on cosmological parameters*, Astrophys. J. **488**, 1 (1997).

[12] M.S. Turner, *The new cosmology: Mid-term report card for inflation*, Ann. Henri Poincaré **4**, S333 (2003).

[13] F. Melchiorri, B. Olivo-Melchiorri y M. Signore, *Precision cosmology*, Rivista Nuovo Cimento **26**, 1 (2003).

[14] P.A.R. Ade *y col.* (Colaboración Planck), *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*, `arXiv:1502.01589`.

[15] P.A.R. Ade *y col.* (Colaboración Planck), *Planck 2015 results. XVI. Isotropy and statistics of the CMB*, Astron. Astrophys., `arXiv:1506.07135`.

[16] V. Mukhanov, *Physical foundations of cosmology*, Cambrige University Press, Cambridge, Inglaterra (2005).

[17] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, Oxford, Inglaterra (2008).

[18] P.A.R. Ade *y col.* (Colaboración Planck), *Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation*, `arXiv:1502.02114`.

[19] M. Bojowald, *Loop Quantum Cosmology*, Living Rev. Rel. **11**, 4 (2008).

[20] G.A. Mena Marugán, *A brief introduction to Loop Quantum Cosmology*, AIP Conf. Proc. **1130**, 89 (2009).

[21] G.A. Mena Marugán, *Loop Quantum Cosmology: A cosmological theory with a view*, J. Phys. Conf. Ser. **314**, 012012 (2011).

[22] A. Ashtekar y P. Singh, *Loop Quantum Cosmology: A status report*, Class. Quantum Grav. **28**, 213001 (2011).

[23] K. Banerjee, G. Calcagni y M. Martín-Benito, *Introduction to Loop Quantum Cosmology*, SIGMA **8**, 016 (2012).

[24] T. Thiemann, *Modern canonical quantum general relativity*, Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra (2007).

[25] K. Giesel y H. Sahlmann, *From classical to quantum gravity: Introduction to Loop Quantum Gravity*, `arXiv:1203.2733`.

[26] A. Ashtekar, T. Pawłowski y P. Singh, *Quantum nature of the Big Bang: An analytical and numerical investigation*, Phys. Rev. D **73**, 124038 (2006).

[27] A. Ashtekar, T. Pawłowski y P. Singh, *Quantum nature of the Big Bang: Improved dynamics*, Phys. Rev. D **74**, 084003 (2006).

[28] M. Martín-Benito, G.A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Further improvements in the understanding of isotropic Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **80**, 104015 (2009).

[29] G.A. Mena Marugán, J. Olmedo y T. Pawłowski, *Prescriptions in Loop Quantum Cosmology: A comparative analysis*, Phys. Rev. D **84**, 064012 (2011).

[30] A. Ashtekar, T. Pawłowski, P. Singh y K. Vandersloot, *Loop Quantum Cosmology of k=1 FRW models*, Phys. Rev. D **75**, 024035 (2007).

[31] L. Szulc, W. Kamiński y J. Lewandowski, *Friedmann-Robertson-Walker model in Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **24**, 2621 (2007) .

[32] E. Bentivegna y T. Pawłowski, *Anti-de Sitter universe dynamics in LQC*, Phys. Rev. D **77**, 124025 (2008).

[33] W. Kamiński y T. Pawłowski, *Loop Quantum Cosmology evolution operator of an FRW universe with a positive cosmological constant*, Phys. Rev. D **81**, 024014 (2010).

[34] T. Pawłowski y A. Ashtekar, *Positive cosmological constant in Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **85**, 064001 (2012).

[35] T. Pawłowski, R. Perini y E. Wilson-Ewing, *Loop Quantum Cosmology of a radiation-dominated flat FLRW universe*, Phys. Rev. D **90**, 123538 (2014).

[36] D.W. Chiou, *Loop Quantum Cosmology in Bianchi type I models: Analytical investigation*, Phys. Rev. D **75**, 024029 (2007).

[37] M. Martín-Benito, G.A. Mena Marugán y T. Pawłowski, *Loop quantization of vacuum Bianchi I cosmology*, Phys. Rev. D **78**, 064008 (2008).

[38] M. Martín-Benito, G.A. Mena Marugán y T. Pawłowski, *Physical evolution in Loop Quantum Cosmology: The example of the vacuum Bianchi I model*, Phys. Rev. D **80**, 084038 (2009).

[39] L. Szulc, *Loop Quantum Cosmology of diagonal Bianchi type I model: Simplifications and scaling problems*, Phys. Rev. D **78**, 064035 (2008).

[40] A. Ashtekar y E. Wilson-Ewing, *Loop Quantum Cosmology of Bianchi type I models*, Phys. Rev. D **79**, 083535 (2009).

[41] A. Ashtekar y E. Wilson-Ewing, *Loop Quantum Cosmology of Bianchi type II models*, Phys. Rev. D **80**, 123532 (2009).

[42] E. Wilson-Ewing, *Loop Quantum Cosmology of Bianchi type IX models*, Phys. Rev. D **82**, 043508 (2010).

[43] S.W. Hawking y G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra (1973).

[44] R.M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago, EE.UU. (1984).

[45] V. Taveras, *Corrections to the Friedmann equations from LQG for a universe with a free scalar field*, Phys. Rev. D **78**, 064072 (2008).

[46] M. Bojowald, G.M. Hossain, M. Kagan y S. Shankaranarayanan, *Anomaly freedom in perturbative Loop Quantum Gravity*, Phys. Rev. D **78**, 063547 (2008).

[47] M. Bojowald, G.M. Hossain, M. Kagan y S. Shankaranarayanan, *Gauge invariant cosmological perturbation equations with corrections from Loop Quantum Gravity*, Phys. Rev. D **79**, 043505 (2009); Phys. Rev. D **82**, 109903(E) (2010).

[48] G. Calcagni y G.M. Hossain, *Loop Quantum Cosmology and tensor perturbations in the Early Universe*, Adv. Sci. Lett. **2**, 184 (2009).

[49] J. Grain, T. Cailleteau, A. Barrau y A. Gorecki, *Fully Loop-Quantum-Cosmology-corrected propagation of gravitational waves during slow-roll inflation*, Phys. Rev. D **81**, 024040 (2010).

[50] M. Bojowald, G. Calcagni y S. Tsujikawa, *Observational constraints on Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. Lett. **107**, 211302 (2011).

[51] E. Wilson-Ewing, *Holonomy corrections in the effective equations for scalar mode perturbations in Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **29**, 085005 (2012).

[52] J. Mielczarek, T. Cailleteau, A. Barrau y J. Grain, *Anomaly-free vector perturbations with holonomy corrections in Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **29**, 085009 (2012).

[53] T. Cailleteau, L. Linsefors y A. Barreau, *Anomaly-free perturbations with inverse-volume and holonomy corrections in Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **31**, 125011 (2014).

[54] M. Bojowald y G. Calcagni, *Inflationary observables in Loop Quantum Cosmology*, JCAP **03**, 032 (2011).

[55] T. Cailleteau y A. Barrau, *Gauge invariance in Loop Quantum Cosmology: Hamilton-Jacobi and Mukhanov-Sasaki equations for scalar perturbations*, Phys. Rev. D **85**, 123534 (2012).

[56] T. Cailleteau, J. Mielczarek, A. Barrau y J. Grain, *Anomaly-free scalar perturbations with holonomy corrections in Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **29**, 095010 (2012).

[57] A. Barrau, M. Bojowald, G. Calcagni, J. Grein y M. Kagan, *Anomaly-free cosmological perturbations in effective canonical quantum gravity*, JCAP **05**, 051 (2015).

[58] M. Fernandez-Méndez, G.A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Hybrid quantization of an inflationary universe*, Phys. Rev. D **86**, 024003 (2012).

[59] M. Fernández-Méndez, G.A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Hybrid quantization of an inflationary model: The flat case*, Phys. Rev. D **88**, 044013 (2013).

[60] M. Fernandez-Méndez, G.A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Effective dynamics of scalar perturbations in a flat Friedmann-Robertson-Walker spacetime in Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **89**, 044041 (2014).

[61] I. Agullo, A. Ashtekar y W. Nelson, *Quantum gravity extension of the inflationary scenario*, Phys. Rev. Lett. **109**, 251301 (2012).

[62] I. Agullo, A. Ashtekar y W. Nelson, *Extension of the quantum theory of cosmological perturbations to the Planck era*, Phys. Rev. D **87**, 043507 (2013).

[63] I. Agullo, A. Ashtekar y W. Nelson, *The pre-inflationary dynamics of Loop Quantum Cosmology: Confronting quantum gravity with observations*, Class. Quantum Grav. **30**, 085014 (2013).

[64] M. Martín-Benito, *Cosmología Cuántica de Lazos: anisotropías e inhomogeneidades*, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, España (2010), `arXiv:1109.5618`.

[65] M. Martín-Benito, L.J. Garay y G.A. Mena Marugán, *Hybrid quantum Gowdy cosmology: Combining Loop and Fock quantizations*, Phys. Rev. D **78**, 083516 (2008).

[66] G.A. Mena Marugán y M. Martín-Benito, *Hybrid quantum cosmology: Combining Loop and Fock quantizations*, Int. J. Mod. Phys. A **24**, 2820 (2009).

[67] L.J. Garay, M. Martín-Benito y G.A. Mena Marugán, *Inhomogeneous Loop Quantum Cosmology: Hybrid quantization of the Gowdy model*, Phys. Rev. D **82**, 044048 (2010).

[68] M. Martín-Benito, G.A. Mena Marugán y E. Wilson-Ewing, *Hybrid quantization: From Bianchi I to the Gowdy model*, Phys. Rev. D **82**, 084012 (2010).

[69] D. Brizuela, G.A. Mena Marugán y T. Pawłowski, *Big Bounce and inhomogeneities*, Class. Quantum Grav. **27**, 052001 (2010).

[70] R.H. Gowdy, *Gravitational waves in closed universes*, Phys. Rev. Lett. **27**, 826 (1971).

[71] R.H. Gowdy, *Vacuum spacetimes with two-parameter spacelike isometry groups and compact invariant hypersurfaces: Topologies and boundary conditions*, Ann. Phys. (Nueva York) **83**, 203 (1974).

[72] M. Martín-Benito, D. Martín-de Blas y G.A. Mena Marugán, *Matter in inhomogeneous Loop Quantum Cosmology: The Gowdy* $^{3}$ *model*, Phys. Rev. D **83**, 084050 (2011).

[73] M. Martín-Benito, D. Martín-de Blas y G.A. Mena Marugán, *Approximation methods in Loop Quantum Cosmology: From Gowdy cosmologies to inhomogeneous models in Friedmann–Robertson–Walker geometries*, Class. Quantum Grav. **31**, 075022 (2014).

[74] J. Cortez, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock quantization of the Gowdy* $^{3}$ *model*, Phys. Rev. D **75**, 084027 (2007).

[75] A. Corichi, J. Cortez, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Quantum Gowdy* $^{3}$ *model: A uniqueness result*, Class. Quantum Grav. **23**, 6301 (2006).

[76] A. Corichi, J. Cortez, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Quantum Gowdy* $^{3}$ *model: Schrödinger representation with unitary dynamics*, Phys. Rev. D **76**, 124031 (2007).

[77] J. Cortez, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock representation of the Gowdy* $S^1 \times S^2$ *and* $S^3$ *models*, Class. Quantum Grav. **25**, 105005 (2008).

[78] J. Cortez, G.A. Mena Marugán, J. Olmedo y J.M. Velhinho, *Criteria for the determination of time dependent scalings in the Fock quantization of scalar fields with a time dependent mass in ultrastatic spacetimes*, Phys. Rev. D **86**, 104003 (2012).

[79] J. Cortez, G.A. Mena Marugán, J. Olmedo y J.M. Velhinho, *A uniqueness criterion for the Fock quantization of scalar fields with time-dependent mass*, Class. Quantum Grav. **28**, 172001 (2011).

[80] M. Fernández-Méndez, G.A. Mena Marugán, J. Olmedo y J.M. Velhinho, *Unique Fock quantization of scalar cosmological perturbations*, Phys. Rev. D **85**, 103525 (2012).

[81] J. Cortez, L. Fonseca, D. Martín-de Blas y G.A. Mena Marugán, *Uniqueness of the Fock quantization of scalar fields under mode preserving canonical transformations varying in time*, Phys. Rev. D **87**, 044013 (2013).

[82] J. Cortez, D. Martín-de Blas, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Massless scalar field in de Sitter spacetime: Unitary quantum time evolution*, Class. Quantum Grav. **30**, 075015 (2013).

[83] M. Sasaki, *Large scale quantum fluctuations in the inflationary universe*, Prog. Theor. Phys. **76**, 1036 (1986).

[84] V. Mukhanov, *Quantum theory of gauge invariant cosmological perturbations*, Sov. Phys. JETP **67**, 1297 (1988).

[85] A. Ashtekar, *Lectures on non-perturbative canonical gravity*, World Scientific, Singapur (1991).

[86] M. Bojowald, *Loop Quantum Cosmology. I: Kinematics*, Class. Quantum Grav. **17**, 1489 (2000).

[87] A. Ashtekar, M. Bojowald y J. Lewandowski, *Mathematical structure of Loop Quantum Cosmology*, Adv. Theo. Math. Phys. **7**, 233 (2003).

[88] C.W. Misner, K.S. Thorne y J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco, EE.UU. (1973).

[89] A. Ashtekar, *New variables for classical and quantum gravity*, Phys. Rev. Lett. **57**, 2244 (1986).

[90] J.F. Barbero G., *Real Ashtekar variables for Lorentzian signature space times*, Phys. Rev. D **51**, 5507 (1995).

[91] G. Immirzi, *Quantum gravity and Regge calculus*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **57**, 65 (1997).

[92] G. Immirzi, *Real and complex connections for canonical gravity*, Class. Quantum Grav. **14**, L177 (1997).

[93] J. Lewandowski, A. Okolow, H. Sahlmann y T. Thiemann, *Uniqueness of diffeomorphism invariant states on holonomy–flux algebras*, Comm. Math. Phys. **267**, 703 (2006).

[94] J.M. Velhinho, *The quantum configuration space of Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **24**, 3745 (2007).

[95] J.J.Halliwell, *Introductory lectures on quantum cosmology*, `arXiv:0909.2566`.

[96] B. Simon, *Topics in functional analysis*, editor R. F. Streater, Academic Press, Londres, Inglaterra (1972).

[97] A. Ashtekar, A. Corichi y P. Singh, *Robustness of key features of Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **77**, 024046 (2008).

[98] J. Yang, Y. Ding y Y. Ma, *Alternative quantization of the Hamiltonian in Loop Quantum Cosmology II: Including the Lorentz term*, Phys. Lett. B **682**, 1 (2009).

[99] W. Kaminski, J. Lewandowski y T. Pawłowski, *Physical time and other conceptual issues of quantum gravity on the example of Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **26**, 035012 (2009).

[100] R.M. Wald, *Quantum Field Theory in curved spacetime and black hole thermodynamics*, University of Chicago Press, Chicago, EE.UU. (1994).

[101] A. Ashtekar y A. Magnon, *Quantum fields in curved space-times*, Proc. R. Soc. Lond. A **346**, 375 (1975).

[102] A. Ashtekar y A. Magnon-Ashtekar, *A curiosity concerning the role of coherent states in Quantum Field Theory*, Pramana **15**, 107 (1980).

[103] J. Cortez, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Fock quantization of a free scalar field with time dependent mass on the three-sphere: Unitarity and uniqueness*, Phys. Rev. D **81**, 044037 (2010).

[104] J. Cortez, G.A. Mena Marugán, R. Serôdio y J.M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock quantization of a free scalar field on $S^1$ with time dependent mass*, Phys. Rev. D **79**, 084040 (2009).

[105] J. Cortez, G.A. Mena Marugán, J. Olmedo y J.M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock quantization of fields with unitary dynamics in nonstationary spacetimes*, Phys. Rev. D **83**, 025002 (2011).

[106] J. Cortez, G.A. Mena Marugán, J. Olmedo y J.M. Velhinho, *A uniqueness criterion for the Fock quantization of scalar fields with time dependent mass*, Class. Quantum Grav. **28**, 172001 (2011).

[107] J. Cortez, G.A. Mena Marugán, J. Olmedo y J.M. Velhinho, *Criteria for the determination of time dependent scalings in the Fock quantization of scalar fields*, Phys. Rev. D **86**, 104003 (2012).

[108] J. Cortez, B. Elizaga Navascués, M. Martín-Benito, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Unitary evolution and uniqueness of the Fock representation of Dirac fields in cosmological spacetimes*, Phys. Rev. D **92**, 105013 (2015).

[109] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Dover, Nueva York, EE.UU (1985).

[110] A. White, *Quantum Field Theory in curved space-time and analogue gravity in Bose-Einstein condensates*, Tesis Doctoral, The Australian National University, Australia (2008).

[111] A. White, S. Weintfurtner y M. Visser, *Signature change events: a challenge for quantum gravity?*, Class. Quantum Grav. **27**, 045007 (2010).

[112] S.W. Hawking, en *Astrophysical cosmology*, editores H.A. Brück, G.V. Coyne y S.M. Longair, Pontificia Academia Scientarium, Ciudad del Vaticano, Vaticano (1982).

[113] J.B. Hartle y S.W. Hawking, *Wave function of the universe*, Phys. Rev. D **28**, 2960 (1983).

[114] S.W. Hawking, *The quantum state of the universe*, Nucl. Phys. B **239**, 257 (1984).

[115] J.J. Halliwell y J.B. Hartle, *Integration contours for the no-boundary wave function of the universe*, Phys. Rev. D **41**, 1815 (1990).

[116] J. Mielczarek, *Gravitational waves from the big bounce*, JCAP **11**, 011 (2008).

[117] M. Artymowski, Z. Lalak y L. Szulc, *Loop Quantum Cosmology corrections to inflationary models*, JCAP **01**, 004 (2009).

[118] J. Grain y A. Barrau, *Cosmological footprints of Loop Quantum Gravity*, Phys. Rev. Lett. **102**, 081301 (2009).

[119] J.-P. Wu y Y. Ling, *The cosmological perturbation theory in loop cosmology with holonomy corrections*, JCAP **05**, 026 (2010).

[120] J. Mielczarek, T. Cailleteau, J. Grain y A. Barrau, *Inflation in Loop Quantum Cosmology: Dynamics and spectrum of gravitational waves*, Phys. Rev. D **81**, 104049 (2010).

[121] E. Wilson-Ewing, *Holonomy corrections in the effective equations for scalar mode perturbations in Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **29**, 085005 (2012).

[122] J. Mielczarek, T. Cailleteau, A. Barrau y J. Grain, *Anomaly-free vector perturbations with holonomy corrections in Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **29**, 085009 (2012).

[123] T. Cailleteau, A. Barrau, F. Vidotto y J. Grain, *Consistency of holonomy-corrected scalar, vector and tensor perturbations in Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **86**, 087301 (2012).

[124] L. Linsefors, T. Cailleteau, A. Barrau y J. Grain, *Primordial tensor power spectrum in holonomy corrected* $\Omega$ *Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **87**, 107503 (2013).

[125] G.M. Hossain, *Primordial density perturbation in effective Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **22**, 2511 (2005).

[126] D.J. Mulryne y N.J. Nunes, *Constraints on a scale invariant power spectrum from superinflation in Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **74**, 083507 (2006).

[127] G. Calcagni y M. Cortês, *Inflationary scalar spectrum in Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **24**, 829 (2007).

[128] J. Mielczarek y M. Szydłowski, *Relic gravitons as the observable for Loop Quantum Cosmology*, Phys. Lett. B **657**, 20 (2007).

[129] J. Grain, A. Barrau y A. Gorecki, *Inverse volume corrections from Loop Quantum Gravity and the primordial tensor power spectrum in slow-roll inflation*, Phys. Rev. D **79**, 084015 (2009).

[130] M. Shimano y T. Harada, *Observational constraints of a power spectrum from super-inflation in Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **80**, 063538 (2009).

[131] M. Bojowald y G.M. Hossain, *Cosmological vector modes and quantum gravity effects*, Class. Quantum Grav. **24**, 4801 (2007).

[132] M. Bojowald y G.M. Hossain, *Loop Quantum Gravity corrections to gravitational wave dispersion*, Phys. Rev. D **77**, 023508 (2008).

[133] E.J. Copeland, D.J. Mulryne, N.J. Nunes y M. Shaeri, *Superinflation in Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **77**, 023510 (2008).

[134] E.J. Copeland, D.J. Mulryne, N.J. Nunes y M. Shaeri, *Gravitational wave background from superinflation in Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **79**, 023508 (2009).

[135] G. Calcagni, *Observational effects from quantum cosmology*, Ann. Phys. (Leipzig) **525**, 323 (2013).

[136] T. Cailleteau, L. Linsefors y A. Barreau, *Anomaly-free perturbations with inverse-volume and holonomy corrections in Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **31**, 125011 (2014).

[137] J.M. Bardeen, *Gauge-invariant cosmological perturbations*, Phys. Rev. D **22**, 1882 (1980).

[138] A. Galindo y P. Pascual, *Quantum Mechanics II*, Springer-Verlag, Berlín, Alemania (1991).

[139] G.C. Wick, *Properties of Bethe-Salpeter wave functions*, Phys. Rev. **96**, 1124 (1954).

[140] T. Dray, C.A. Manogue y R.W. Tucker, *Particle production from signature change*, Gen. Rel. Grav. **23**, 967 (1991).

[141] T. Dray, C.A. Manogue y R.W. Tucker, *Scalar field equation in the presence of signature change*, Phys. Rev. D **48**, 2587 (1993).

[142] T. Dray, C.A. Manogue y R.W. Tucker, *Boundary conditions for the scalar field in the presence of signature change*, Class. Quantum Grav. **12**, 2767 (1995).

[143] D.G. Vergel y E.J.S. Villaseñor, *Unitary evolution of free massless fields in de Sitter spacetime*, Class. Quantum Grav. **25**, 145008 (2008).

[144] A.A. Starobinsky, *Spectrum of relic gravitational radiation and the early state of the Universe*, JETP Lett. **30**, 682 (1979).

[145] A.H. Guth, *Inflationary Universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).

[146] S.W. Hawking, *Perturbations of an expanding universe*, Astrophys. J. **145**, 544 (1966).

[147] D.W. Olson, *Density perturbations in cosmological models*, Phys. Rev. D **14**, 327 (1976).

[148] M. Sasaki, *Gauge invariant scalar perturbations in the new inflationary universe*, Prog. Theor. Phys. **70**, 394 (1983).

[149] H. Kodama y M. Sasaki, *Cosmological perturbation theory*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **78**, 1 (1984).

[150] J.J. Halliwell y S.W. Hawking, *Origin of structure in the Universe*, Phys. Rev. D **31**, 1777 (1985).

[151] V. Mukhanov, *Quantum theory of gauge-invariant cosmological perturbations* Zh. Eksp. Teor. Fiz. **94**, 1 (1988); Sov. Phys. JETP **67**, 1297 (1988).

[152] G.F.R. Ellis y M. Bruni, *Covariant and gauge-invariant approach to cosmological density fluctuations*, Phys. Rev. D **40**, 1804 (1989).

[153] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, Nueva York, EE.UU. (1964).

[154] D. Marolf, *Quantum observables and recollapsing dynamics*, Class. Quantum Grav. **12**, 1199 (1994).

[155] D. Marolf, *Refined algebraic quantization: Systems with a single constraint*, `arXiv:gr-qc/9508015`.

[156] M. Bojowald and G.M. Paily, *Deformed general relativity and effective actions from Loop Quantum Gravity*, Phys. Rev. D **86**, 104018 (2012).

[157] A. Ashtekar and D. Sloan, *Loop Quantum Cosmology and slow roll inflation*, Phys. Lett. B **694**, 108 (2010).

[158] I. Shirai y S. Wada, *Cosmological perturbations and quantum fields in curved space*, Nucl. Phys. B **303**, 728 (1988).

[159] D. Langlois, *Hamiltonian formalism and gauge invariance for linear perturbations in inflation*, Class. Quantum Grav. **11**, 389 (1994).

[160] E.J.C. Pinho y N. Pinto-Neto, *Scalar and vector perturbations in quantum cosmological backgrounds*, Phys. Rev. D **76**, 023506 (2007).

[161] F.T. Falciano y N. Pinto-Neto, *Scalar perturbations in scalar field quantum cosmology*, Phys. Rev. D **79**, 023507 (2009).

[162] B.P. Abbott *y col.* (Colaboración Científica LIGO y Colaboración Virgo), *Observation of gravitational waves from a binary black hole merge*, Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016).

[163] C. Kiefer y M. Kraemer, *Quantum gravitational contributions to the Cosmic Microwave Background anisotropy spectrum*, Phys. Rev. Lett. **108**, 021301 (2012).

[164] D. Brizuela, C. Kiefer y M. Kraemer, `arXiv:1511.05545`.